

LEITFADEN
DER
EBENEN GEOMETRIE,

MIT BENUTZUNG
NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON
DR. HUBERT MÜLLER,
OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN:

- I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS.
II. DIE KEGELSCHNITTE UND DIE ELEMENTE DER NEUEREN GEOMETRIE

ZWEITER THEIL.

DIE KEGELSCHNITTE UND DIE ELEMENTE DER NEUEREN GEOMETRIE.



LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

LEITFADEN

DER

EBENEN GEOMETRIE

VON

DR. ROBERT MÜLLER

LEHRER AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

LEITFADEN

DER EBENEN GEOMETRIE

IN FÜNF THEILEN

1. DIE GRUNDLEGENDE BEGRIFFE

2. DIE EIGENSCHAFTEN DER PUNKTE

3. DIE EIGENSCHAFTEN DER GERADEN

4. DIE EIGENSCHAFTEN DER KURVEN



LEITFADEN

DER EBENEN GEOMETRIE

1875

Vorwort.

Der zweite Theil des Leitfadens der ebenen Geometrie soll ein Schulbuch darstellen, welches sich nicht auf die einleitenden Sätze der neueren Geometrie beschränkt, sondern das Wesentliche aus der Theorie der Kegelschnitte dem Unterricht leichter zugänglich macht.

Die Darstellung bezieht sich an verschiedenen Stellen auf Gegenstände, welche im ersten Theile behandelt sind. Um jedoch diesen zweiten Theil unabhängig zu machen, sind einige Wiederholungen aufgenommen worden. Dazu gehört die Einleitung, deren Paragraphen besonders nummerirt sind. Ferner wird der Leser des ersten Theiles in Abschnitt I, IV und V des zweiten Cursus bekannte Stellen finden.

Man ersieht daraus, dass die Darstellung in möglichst vielen Punkten an Bekanntes anzuknüpfen sucht, um leichte Zugänge zu verschiedenen Theilen des Stoffes zu finden und den letzteren gleichmässig zu durchforschen.

Der Leser wird, wie ich hoffe, erkennen, dass die Wissenschaftlichkeit der Darstellung und die Symmetrie des Aufbaues dadurch nicht gelitten hat.

Die aus den Eigenschaften der Brennpunkte sich ergebenden Sätze der Ellipse, Parabel und Hyperbel sind in dem ersten Cursus selbstständig entwickelt. Der Schluss des Buches kommt wieder auf diesen Anfang zurück, indem gezeigt wird, dass die mit Hülfe der neueren Geometrie erforschten Kegelschnitte mit den genannten Curven identisch sind. Wenn Theile des dritten Cursus sich auf Raumgebilde beziehen und einige wenige Sätze der Stereometrie benützen,

so sind diese Betrachtungen nur als Mittel zum Zweck anzusehen und nehmen dem Buche nicht das Recht auf seinen Titel. Die zahlreichen und zum Theile mit Andeutungen versehenen Uebungen sollen zur Anschauung bringen, dass die neuere Geometrie eine Disciplin ist, welche mit einfachen Mitteln ein grosses Gebiet beherrscht.

Dass ich aus den Schriften über neuere Geometrie von Steiner, Staudt, Chasles, Paulus, Reye indirekten oder direkten Nutzen für die Arbeit gezogen habe, ist in der Natur der letzteren begründet. Namentlich ist § 52 nach der *Géométrie supérieure* von Chasles dargestellt.

Ich empfehle das Schriftchen zunächst den Herren Collegen, welche in der Lage sind, die Theorie der Kegelschnitte im Unterricht zu behandeln, glaube aber, dass auch bei dem Gebrauch zum Selbstunterrichte das Buch durch seine Einrichtung eine zweckmässige Abwechslung von Reception und Production veranlassen wird.

Metz, im Mai 1875.

Dr. Hubert Müller.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. — 2. Die Halbierungslinien der Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks. — 3. Sätze über Verhältnisse von Strecken. — 4. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis.	
Erster Cursus. Ellipse, Parabel und Hyperbel.	
I. Abschnitt. Die Ellipse	6
§ 1. Definition der Ellipse — Brennpunkte. — 2. Axen der Ellipse. — 3. Tangenten der Ellipse.	
II. Abschnitt. Die Hyperbel	10
§ 4. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte. — 5. Axen der Hyperbel. — 6. Tangenten der Hyperbel. — 7. Asymptoten der Hyperbel.	
III. Abschnitt. Die Parabel	14
§ 8. Definition der Parabel. — Brennpunkte. — 9. Tangenten der Parabel. — 10. Uebungen.	
Zweiter Cursus. Die Grundgebilde der neuern Geometrie.	
I. Abschnitt. Harmonische Punkte und Strahlen. Das vollständige Viereck und Vierseit	21
§ 11. Harmonische Punkte und Strahlen. — 12. Fortsetzung. — 13. Das vollständige Viereck und Vierseit. — 14. Uebungen.	
II. Abschnitt. Projectivische Grundgebilde	28
§ 15. Punktreihen und Strahlenbüschel. — 16. Projectivische Grundgebilde. — 17. Aufgaben. — 18. Allgemeine Sätze. — 19. Bedingungen der perspectivischen Lage der Grundgebilde. — 20. Von dem Sinne der Grundgebilde. — 21. Der Kreis und die projectivischen Grundgebilde.	
III. Abschnitt. Die projectivischen Grundgebilde. (Fortsetzung)	35
§ 22. Unendlich ferne Punkte. — 23. Die Gegenpunkte projectivischer Punktreihen. — 24. Aehnliche Punktreihen. — 25. Aufgaben. — 26. Uebungen.	
IV. Abschnitt. Involutorische Gebilde	43
§ 27. Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel. — 28. Der Büschel von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte gehen. — 29. Vorbereitende Sätze. — 30. Identität involutorischer Gebilde mit projectivischen Gebilden, deren Elemente sich doppelt entsprechen. — 31. Folgerungen. — 32. Aufgaben. — 33. Uebungen.	
V. Abschnitt. Pol und Polare in Bezug auf den Kreis	51
§ 34. Pol und Polare. — 35. Conjugirte Punkte. — 36. Fortsetzung.	
VI. Abschnitt. Projectivische Gebilde in schiefer Lage	56
§ 37. Aufgaben. — 38. Aufgaben. — 39. Die Curve als Punktgebilde oder als Tangentengebilde. — 40. Curven, welche das Erzeugniss projectivischer Gebilde sind. — 41. Aufgaben.	

Dritter Cursus.

Projectivische Figuren. Kegelschnitte.

I. Abschnitt. Projectivische Figuren 66

§ 42. Das ebene System und der Strahlenbündel. — 43. Beziehung des ebenen Systems auf den Strahlenbündel. — 44. Beziehung ebener Systeme aufeinander. — 45. Fortsetzung. Perspectivische Abbildung ebener Figuren. — 46. Der besondere Fall, wo die Träger perspectivischer Systeme parallel sind. — 47. Die Träger der perspectivischen Systeme sind nicht parallel. — 48. Die Gegenaxen perspectivischer Systeme. — 49. Fortsetzung. — 50. Uebungen.

II. Abschnitt. Kegelschnitte. Identität derselben mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde . . 77

§ 51. Kegelschnitte. — 52. Identität der Kegelschnitte mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde. — 53. Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf Bedingungen. — 54. Uebungen.

Vierter Cursus.

Eigenschaften der Kegelschnitte. Identität derselben mit den Curven des ersten Cursus.

I. Abschnitt. Figuren, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben sind . . . 83

§ 55. Sätze von Pascal und Brianchon. — 56. Aufgaben.

II. Abschnitt. Pol und Polare 88

§ 57. Pol und Polare. — 58. Reciproke Figuren. — 59. Fortsetzung. — 60. Uebungen.

III. Abschnitt. Der Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade 97

§ 61. Eintheilung der Kegelschnitte. — 62. Die Kegelschnitte der ersten und zweiten Art haben einen Mittelpunkt. — 63. Conjugirte Durchmesser. — 64. Einbeschriebene und umbeschriebene Parallelogramme. — 65. Die Kegelschnitte der dritten Art haben keinen Mittelpunkt. — 66. Axen der Kegelschnitte. — 67. Uebungen.

IV. Abschnitt. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus 109

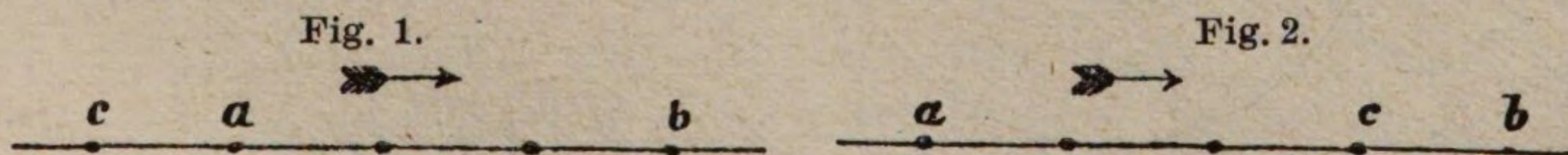
§ 68. Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus. — 69. Uebungen.

Einleitung.

Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. § 1.

Um für Strecken auf derselben Geraden oder auf parallelen Geraden die Beziehung zwischen ihren Längen und diejenige zwischen ihren Richtungen durch dasselbe Zeichen auszudrücken, verfährt man folgendermassen.

Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden als positive und negative Richtung unterschieden. Es ist der Wahl überlassen, welche Richtung man als die positive ansehen will, nur müssen, wenn parallele Gerade in der Figur vorhanden sind, die positiven Richtungen derselben übereinstimmen. Die Längenzahl einer Strecke erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Richtung vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte mit der positiven oder negativen Richtung der Geraden übereinstimmt und die so definirte algebraische Grösse wird bezeichnet, indem man den Buchstaben des Endpunktes hinter denjenigen des Anfangspunktes schreibt und dieses Symbol mit einer Klammer umgibt. Wenn in Fig. 1 der Pfeil die positive Richtung bezeichnet und ca als Längeneinheit angesehen wird, so ist $(ca) = +1$, $(ab) = +3$, $(ba) = -3$, $(ab) = -(ba)$.



Der Quotient (das Verhältniss) und das Product zweier Strecken werden nach den Regeln der Algebra gebildet, so dass dieselben positiv oder negativ werden, je nachdem die beiden Strecken gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

$da : db = ca : cb$. Wenn andererseits die Winkel acg und gch gleich sind, so ziehe man ak mit gc parallel und verfare ganz wie im Vorigen, um $ga : gb = ca : cb$ zu erhalten. Aus diesen beiden Proportionen folgt die Behauptung.

Der Beweis von α) wird indirect geführt.

Anmerkung. Wenn eine Strecke ab in d und g nach demselben Verhältniss getheilt wird, so ist auch die Strecke dg in a und b nach gleichem Verhältniss getheilt.

Beweis. Man leite aus $ga : gb = da : db$ durch Vertauschung der mittlern Glieder $ag : ad = bg : bd$ ab, woraus die Behauptung mit Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der Punkte sich ergibt.

Sätze über Verhältnisse von Strecken.

§ 3.

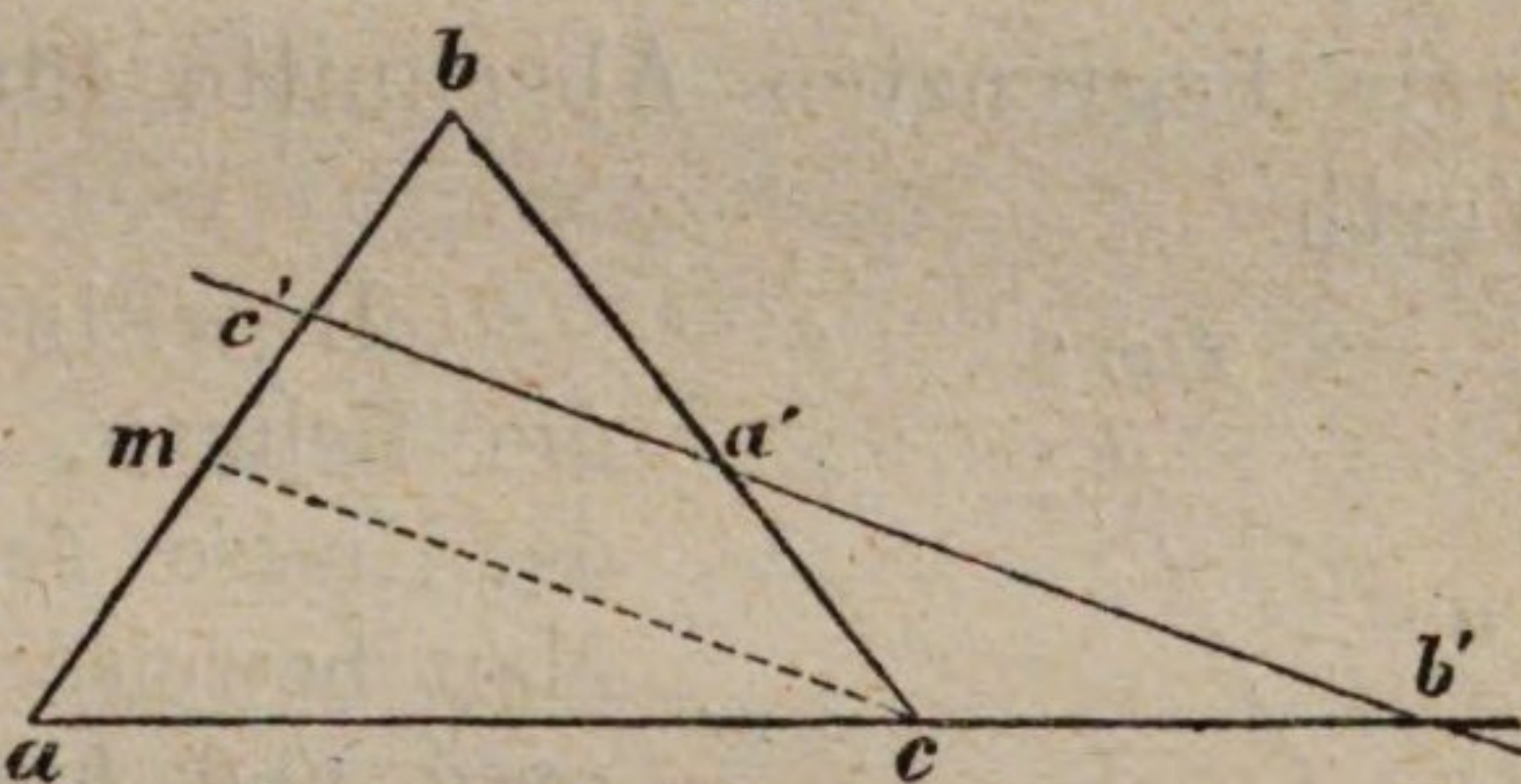
a) Wenn die Seiten eines Dreiecks abc (Fig. 4) oder ihre Verlängerungen von einer Geraden in a', b', c' geschnitten werden, so ist das Product der Abstandsverhältnisse

$$\frac{a'c}{a'b'} \cdot \frac{b'a}{b'c'} \cdot \frac{c'b}{c'a} = 1$$

der Einheit gleich.

Beweis. a) a', b', c' (Fig. 4) seien Punkte einer Geraden. Zieht man cm mit derselben parallel, so kann man die Verhältnisse $b'a : b'c'$ und $a'c : a'b'$ durch die Verhältnisse $c'a : c'm$ und $c'm : c'b$ ersetzen. Multiplicirt man noch das Product der beiden letzten Verhältnisse mit $c'b : c'a$, so hebt sich Alles fort und es bleibt für das Product der Werth 1.

Fig. 4.

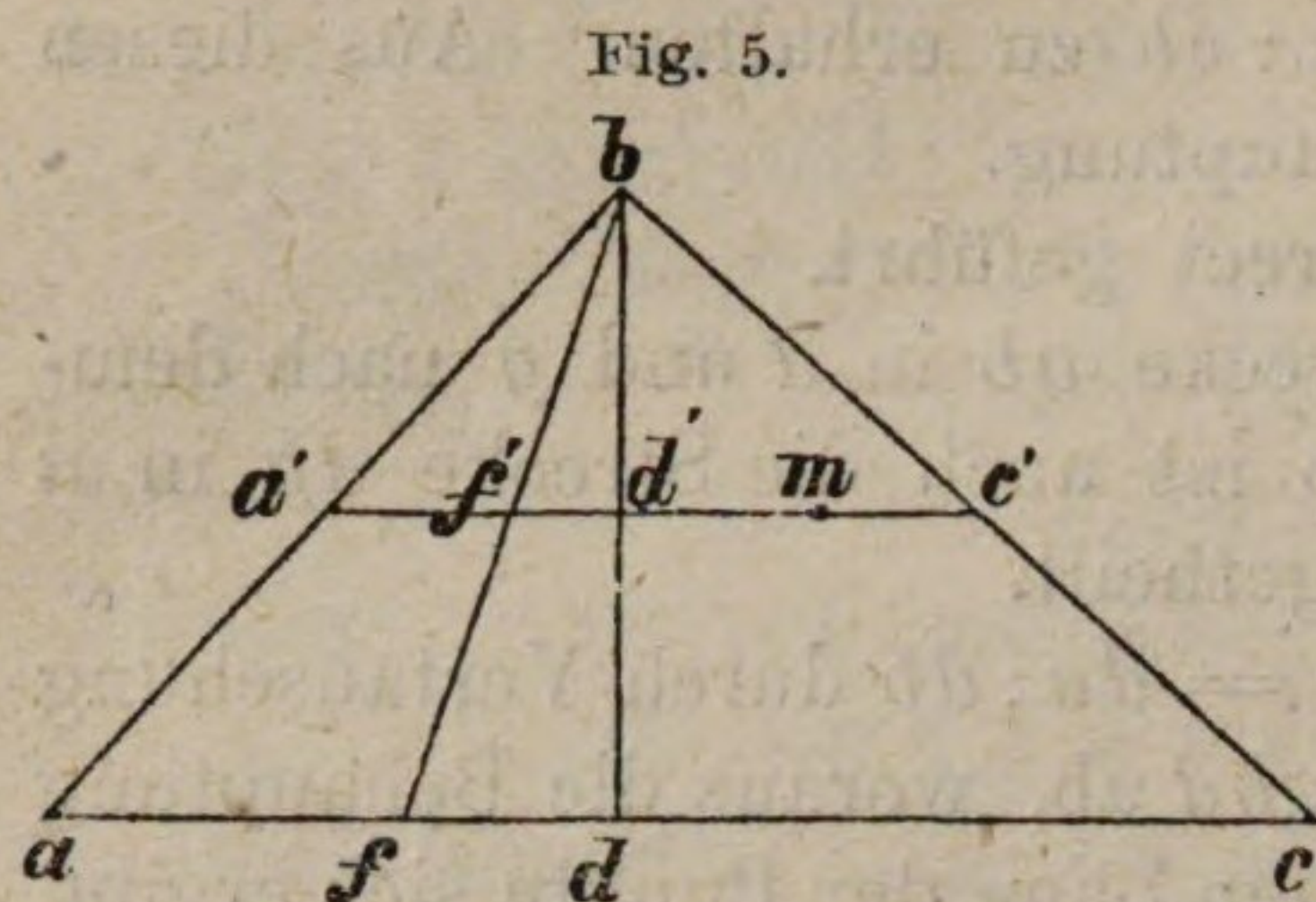


b) Wenn man durch einen Punkt Strahlen zieht, welche zwei parallele Geraden in entsprechenden Punktschneiden, so verhalten sich die Strecken der einen Geraden, wie die entsprechenden Strecken der andern.

β) Wenn auf zwei parallelen Geraden entsprechende Punkte so liegen, dass die von einem beliebigen Punkte ausgehenden Abschnitte der einen Geraden sich wie die entsprechenden Strecken der andern verhalten, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt.

*) Die Abstandsverhältnisse (siehe § 1) sind jedoch hier ohne Rücksicht auf die Vorzeichen der Strecken bestimmt.

Beweis. b) Wenn (Fig. 5) ac mit $a'c'$ parallel ist und aa' , cc' , dd' , ff' durch b gehen, so sind die Verhältnisse $ba :$

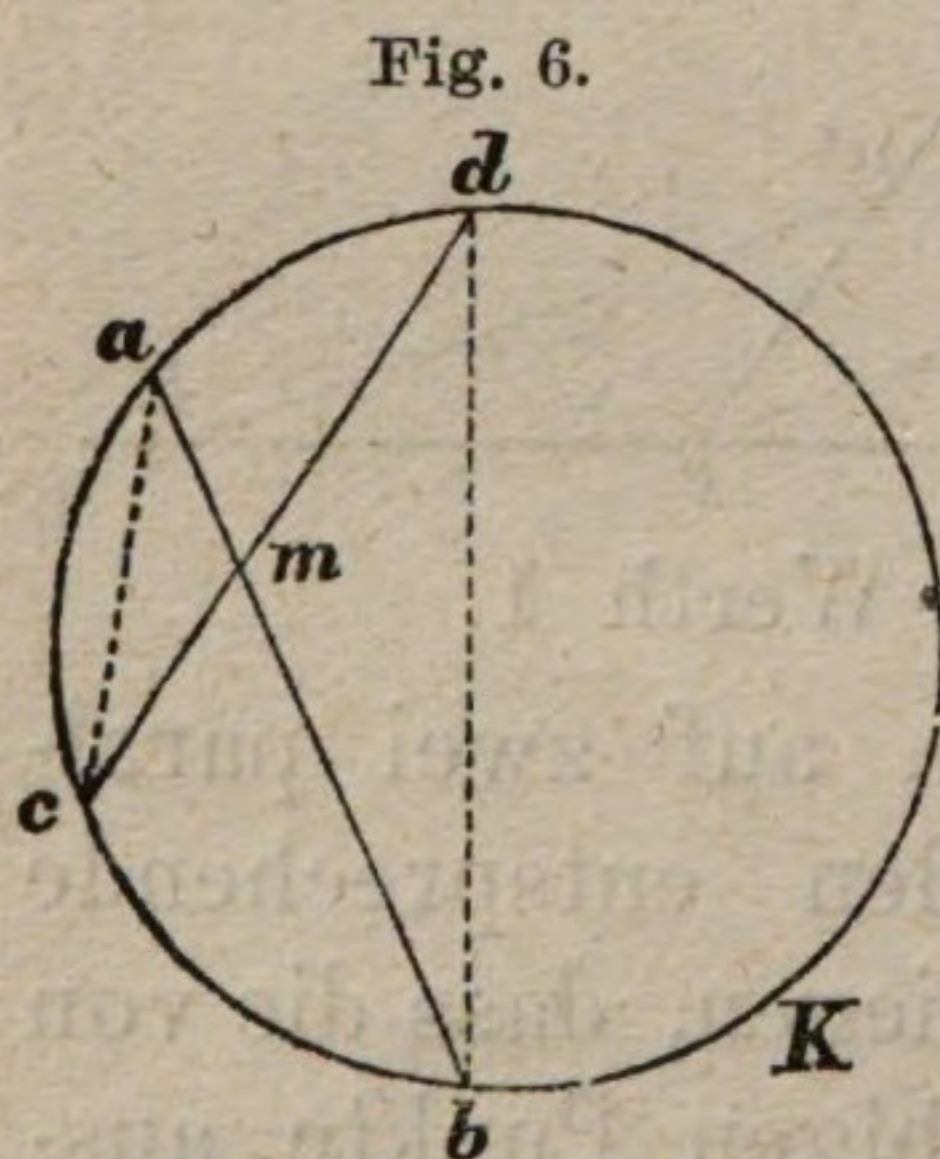


$ba' : ba'$, $bf : bf'$, $bd : bd'$, $bc : bc'$ nach einander gleich*). Die Verhältnisse $af : a'f'$, $ad : a'd'$, $fd : f'd'$... können aber durch eines dieser Verhältnisse ersetzt werden**) und müssen deshalb auch gleich sein. Aus den hieraus entstehenden Proportionen ergibt sich die Behauptung:

β) Wenn (Fig. 5) $af : ad : ac = a'f' : a'd' : a'c'$ und die entsprechenden Punkte auf den Parallelen in gleicher Reihenfolge liegen***), so verlängere man aa' um ff' bis zum Schnitt in b . Würden nun b , d' , d nicht auf einer Geraden liegen, so müsste $a'c'$ von bd in einem andern Punkte m geschnitten werden. Dann hätte man $af : ad = a'f' : a'm^*$, folglich wäre $af : ad$ von $a'f' : a'd'$ verschieden, was der Voraussetzung widerspricht.

§ 4. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Kreis.

a) Wenn man durch einen Punkt Secanten eines Kreises zieht, so hat das Product der durch diesen Punkt und den Kreis begrenzten Abschnitte für jede Secante den gleichen Werth.



Beweis (Fig. 6). 1) ab und cd seien die Sehnen, welche auf zwei innerhalb des Kreises sich schneidenden Secanten liegen. Man beweise die Aehnlichkeit der Dreiecke cma und bmd , woraus die Proportion $mc : mb = ma : md$ und die Gleichung $mc \cdot md = ma \cdot mb$ folgt.

2) ab und cd (Fig. 7) seien zwei Secanten, die sich ausserhalb des Kreises schneiden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke mcb und mad folgt: $mc : ma = mb : md$ und hieraus: $mc \cdot md = ma \cdot mb$.

b) Wenn durch einen Punkt eine Secante und eine

*) Mit Berücksichtigung der Zeichen: $(ba) : (ba') = (bf) : (bf') = (bd) : (bd') = (bc) : (bc')$ und im Folgenden $(af) : (a'f') = (ad) : (a'd') = (fd) : (f'd')$ nach § 1.

**) Man schliesse dies aus I, § 63a oder aus der Aehnlichkeit von Dreiecken.

***) d. h. wenn $(af) : (ad) : (ac) = (a'f') : (a'd') : (a'c')$ nach § 1.

Tangente eines Kreises gezogen werden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der Secante und ihrem äussern Abschnitt.

Beweis. Man denke in Fig. 7 die Strecken ar und br gezogen und beweise die Aehnlichkeit der Dreiecke arm und rbm , woraus $am : mr = rm : mb$ folgt.

Erklärung. Wenn man die Secantenabschnitte, von welchen in a) die Rede ist, von dem Schnittpunkte der Secanten aus durchlaufen denkt und nach § 1 die Vorzeichen der Abschnitte und ihrer Producte bestimmt, so werden diese Producte positiv oder negativ, je nachdem die Secanten sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises schneiden.

Das in Grösse und Vorzeichen bestimmte Product der von einem Punkte m und einem Kreise begrenzten Secantenabschnitte heisst die Potenz des Punktes m in Bezug auf den Kreis. Dieselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt vom Kreise aus- oder eingeschlossen ist.

c) Die Potenz eines Punktes m ist ihrem absoluten Werthe nach gleich dem Quadrate der halben kleinsten Sehne oder dem Quadrate der Tangente des Punktes m , je nachdem m von dem Kreise ein- oder ausgeschlossen ist.

Beweis 1) Wenn (Fig. 8) m von dem Kreise eingeschlossen ist, so sind die Abschnitte mi und mk der kleinsten Sehne gleich gross, daher hat man $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mg} \cdot \overline{mf} = \overline{mk} \cdot \overline{mi} = \overline{mk}^2$.

2) Wenn (Fig. 7) m von dem Kreise ausgeschlossen ist, so folgt aus b) $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mr}^2$.

d) Man erhält die Potenz eines Punktes m in Bezug auf den Kreis, wenn man das Quadrat des Radius von dem Quadrate der Entfernung des Punktes m vom Centrum abzieht.

Fig. 7.

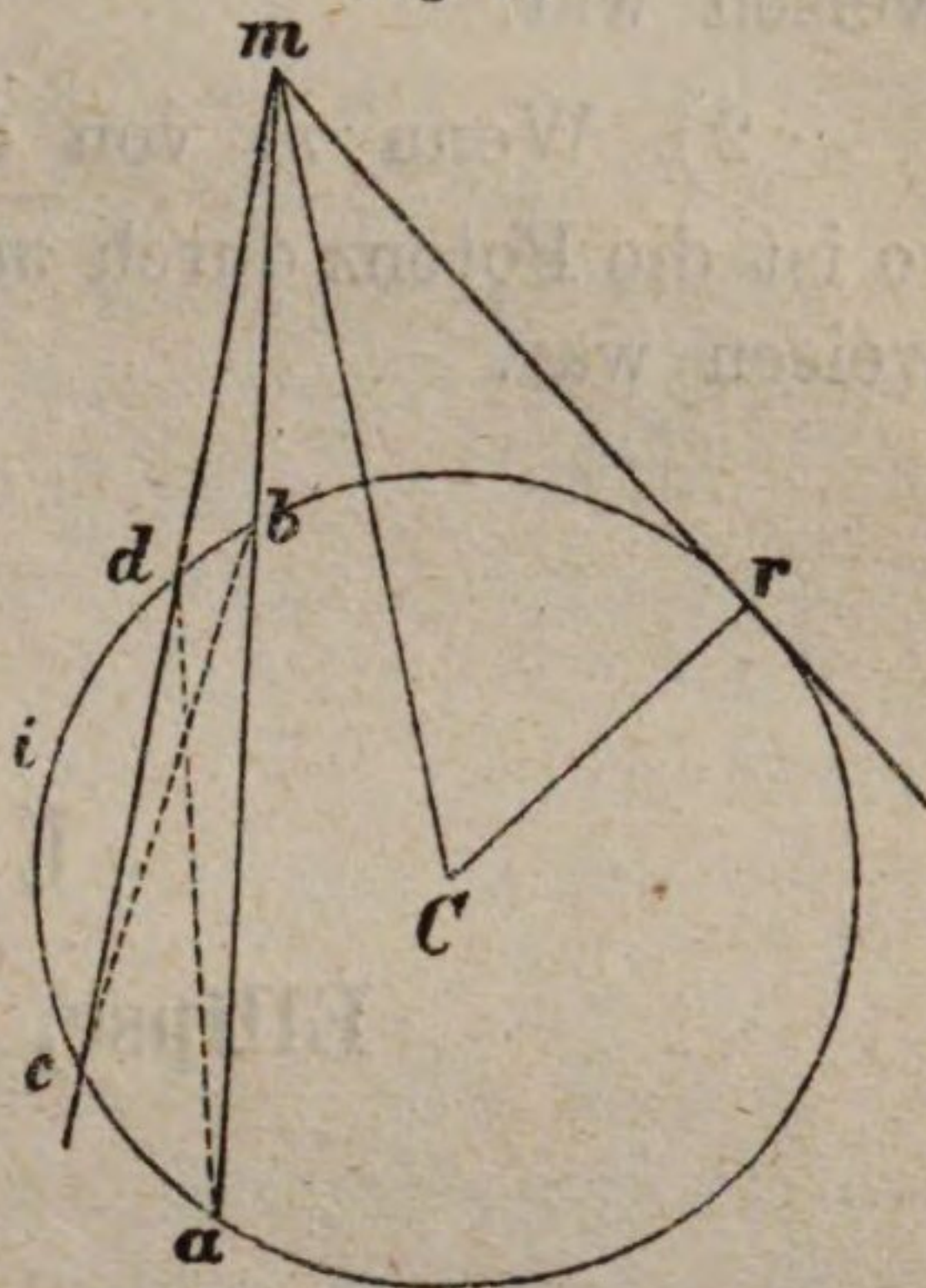
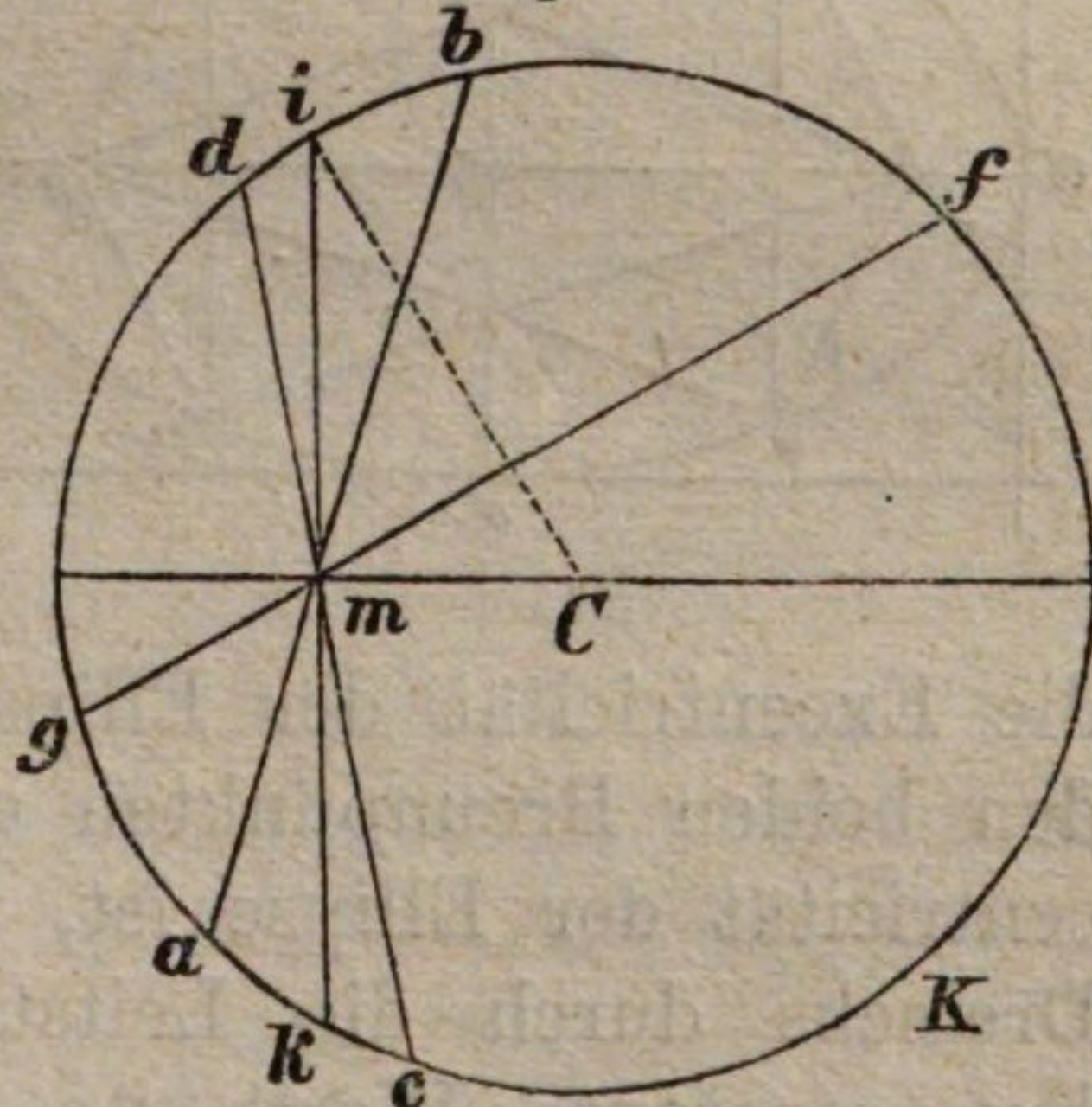


Fig. 8.



Beweis 1) Wenn m von dem Kreise eingeschlossen ist (Fig. 8), so ist nach der Erklärung und nach c) die Potenz durch $-\overline{mi^2} = -(\overline{iC^2} - \overline{mC^2}) = \overline{mC^2} - \overline{iC^2}$ dargestellt, was zu beweisen war.

2) Wenn m von dem Kreise ausgeschlossen ist (Fig. 7), so ist die Potenz durch $\overline{mr^2} = \overline{mC^2} - \overline{Cr^2}$ dargestellt, was zu beweisen war.

Erster Cursus.

Ellipse, Hyperbel und Parabel.

I. Abschnitt.

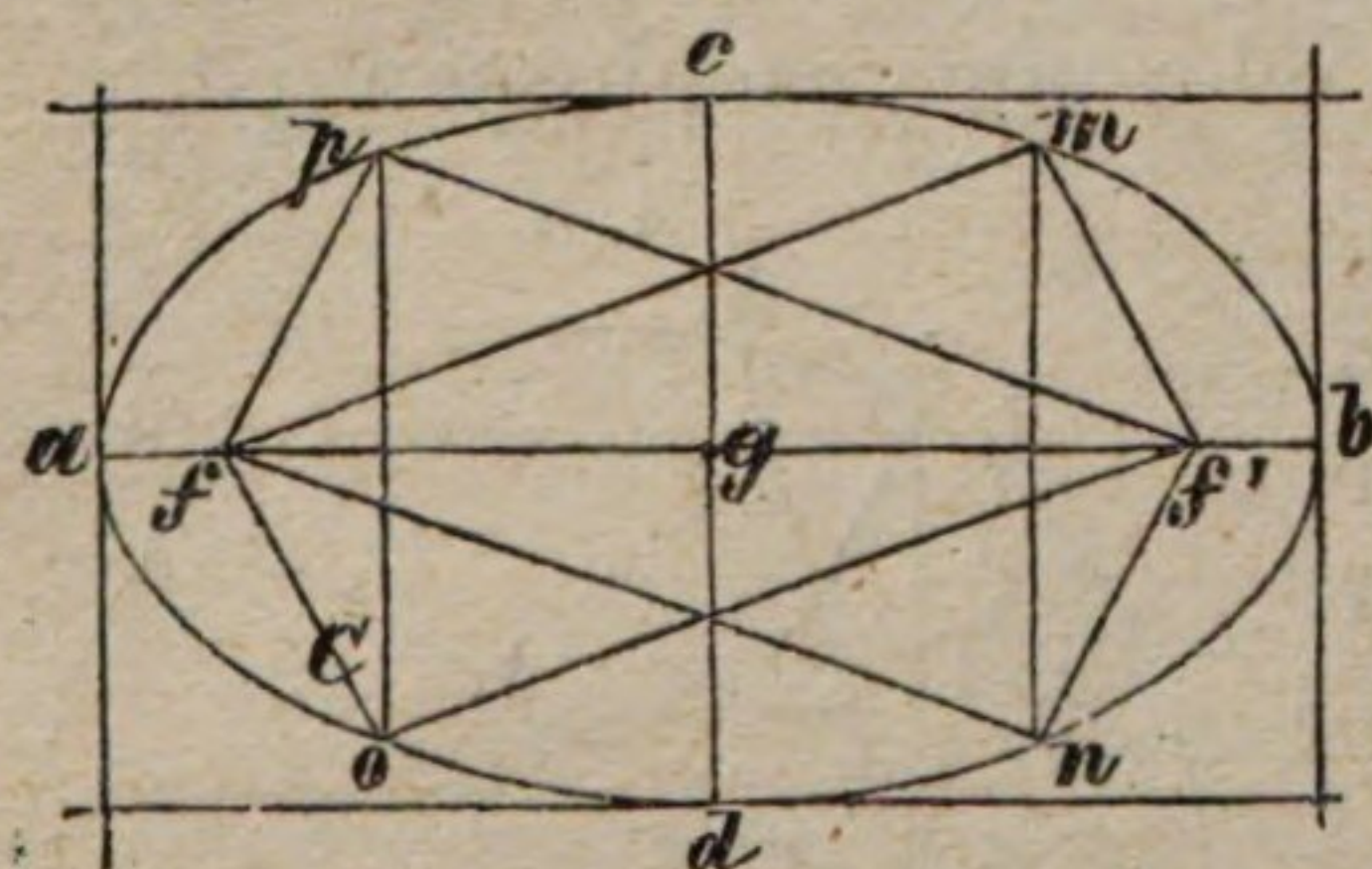
Die Ellipse.

§ 1. Definition der Ellipse. — Brennpunkte.

a) Erklärung. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

Die beiden festen Punkte (f und f' in Fig. 9) heissen die Brennpunkte der Ellipse. Diejenigen Strecken (mf und mf'), welche einen Ellipsenpunkt (m) mit den beiden Brennpunkten verbinden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der gegebenen Länge, welcher die Summe der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Der Abstand (ff') der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Ellipse. Ein Punkt der Ellipse bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die Excentricität der Ellipse ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der constante Werth $2a$ der Summe dieser Leitstrahlen muss daher (I, § 20^{*)}) grösser als die Excentricität der Ellipse sein.

Fig. 9.



*) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

b) Aufgabe. Beliebige viele Punkte einer Ellipse zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Summe der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe um den Brennpunkt f (Fig. 9) einen Kreis mit dem Radius r und mit r' einen solchen um den Brennpunkt f' . Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte m und n der Ellipse, deren Abstand mn von ff' senkrecht halbirt wird (I, § 34a). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man zwei andere Punkte p und o der Ellipse, deren Abstand ebenfalls von ff' senkrecht halbirt wird. Es ist noch zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so gross genommen wird, dass $r - r'$ die Excentricität ff' übertrifft.

Anmerkung. Eine sehr instructive Art, die Ellipse zu zeichnen ist die folgende. Man stecke an dem Ort der beiden Brennpunkte zwei Stifte ein und binde einen Faden zu einer Schleife, welche so lang ist als die Excentricität und die Länge $2a$ zusammengenommen. Wenn man diese Schleife über die beiden Stifte legt und mit einem dritten Stifte anzieht, so befindet sich der letztere in einem Punkte der Ellipse.

Axen der Ellipse.

§ 2.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (grosse Axe) und die Mittelsenkrechte der Excentricität (kleine Axe) sind Symmetriearien der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Ellipse.

Beweis. Die Strecken mn und po (Fig. 9) sind einander gleich und werden beide durch ff' senkrecht halbirt (§ 1b, Auflösung). mno ist also ein Rechteck, dessen Symmetriearien ff' und cd sich in dem Mittelpunkte desselben schneiden. Hieraus folgen die Behauptungen, wenn man bedenkt, dass zu jedem Punkte der Ellipse 3 andere gehören, welche mit ihm in derselben Weise ein Rechteck bilden (vergl. I, § 49).

b) Jede der beiden Axen schneidet die Ellipse in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Ellipse). Die Scheitelpunkte der grossen Axe haben von dem Mittelpunkte der Ellipse die Entfernung a . Die Scheitelpunkte der kleinen Axe haben von jedem Brennpunkte dieselbe Entfernung a .

Beweis. (Fig. 9.) 1) Wenn $ga = gb = a$, so sind die Punkte a und b auf der Ellipse gelegen, denn es ist zum Beispiel für den Punkt b : $fb + f'b = fb + fa = ba = 2a$ (§ 1a).

2) Wenn $fc = f'c = a$, so ist der Punkt c auf der Ellipse gelegen, weil $fc + f'c = 2a$. Zugleich ist aber c nach I, § 23a auf der Halbirungssenkrechten von ff' , das heisst auf der kleinen Axe gelegen. Dasselbe gilt für den Punkt d .

c) Zusatz. Die Tangenten*) der Ellipse in den Scheitelpunkten einer Axe stehen auf dieser Axe senkrecht.

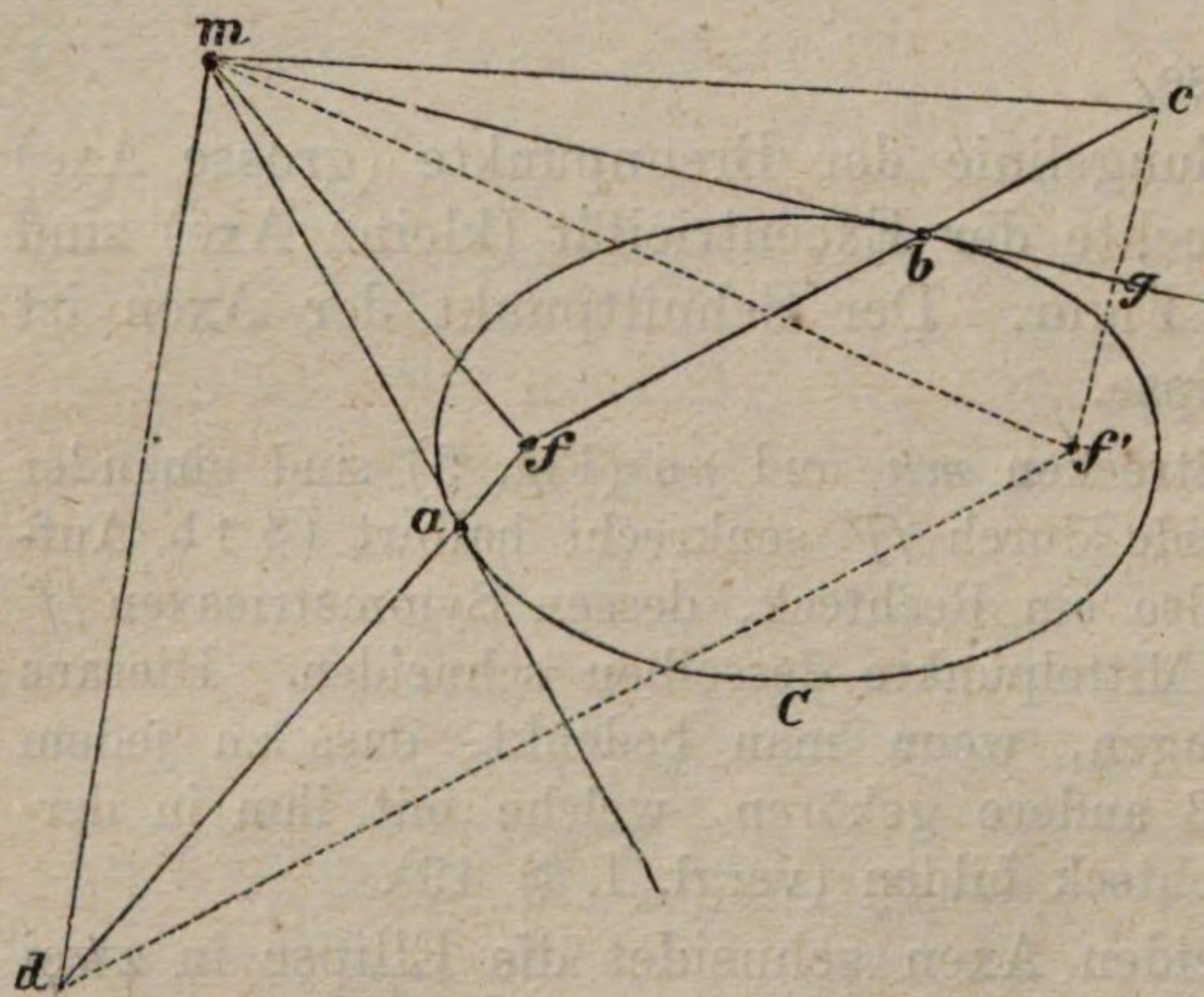
Beweis. Die Geraden mp und mn in Fig. 9 sind bezüglich senkrecht auf der kleinen und der grossen Axe. Diese Geraden gehen aber in die Tangenten der Scheitelpunkte c und b über, wenn das einbeschriebene Rechteck $opmn$ sich so verändert, dass der Punkt m dem Punkte c oder b sich unbegrenzt nähert.

§ 3. Tangenten der Ellipse.

a) Wenn diejenige Strecke, welche den Gegenpunkt eines Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade mit dem andern Brennpunkte verbindet, die Länge $2a$ hat, so wird die Ellipse von dieser Geraden in einem Punkte jener Strecke berührt.

Beweis (Fig. 10). c sei der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die Gerade mg und die Strecke fc , welche

Fig. 10.



mg in dem Punkte b schneidet, habe die Länge $2a$. Dann ist der Punkt b auf der Ellipse gelegen, denn, weil (I, § 23a) $bf' = bc$, so hat die Summe $fb + f'b$ der Leitstrahlen des Punktes b den Werth $fb + bc = 2a$. Kein anderer Punkt m der Geraden mg kann

auf der Ellipse liegen, denn für ihn wäre $mf + mf' = mf + mc$ und die Summe der Seiten mf und mc in dem Dreieck mfc ist grösser als fc oder $2a$. Die Gerade mg hat also den einzigen Punkt b mit der Ellipse gemein, das heisst, sie berührt die Ellipse in b .

*) Vergleiche I. § 43 Anmerkung.

b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt den Gegenpunkt des andern Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Ellipse dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Ellipse mit den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Winkel mbf und gbf' der in dem Beweise von a) betrachteten Figur sind einander gleich, weil beide dem Winkel gbc gleich sind (bezüglich als Scheitelwinkel und aus Congruenz der Dreiecke gbf' und gbc).

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer Ellipse die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 10.) Um in dem Punkte a die Tangente an die Ellipse zu zeichnen, ziehe man fa und mache auf dieser Richtung $fd = 2a$. Der Punkt d ist der Gegenpunkt von f' in Bezug auf die gesuchte Tangente. Die Letztere selbst ist die Halbirungssenkrechte von $f'd$ (§ 3a).

e) Aufgabe. Von einem Punkte m ausserhalb der Ellipse Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung (Fig. 10). m sei der gegebene Punkt. Man bestimme die Gegenpunkte des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchten Tangenten. Da der Brennpunkt f' und sein Gegenpunkt in Bezug auf eine Tangente von jedem Punkte dieser Tangente gleichen Abstand haben, so müssen die zu construierenden Gegenpunkte auf einem Kreise liegen, der um m mit dem Radius mf' beschrieben ist. Nach § 3a) und b) sind also jene Gegenpunkte c und d die Schnittpunkte dieses Kreises mit einem andern Kreise, der mit dem Radius $2a$ um f beschrieben ist. Die gesuchten Tangenten selbst sind die Halbirungssenkrechten der Strecken $f'c$ und $f'd$.

f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Ellipse gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Durchschnittspunkte zieht, so halbirt die letzte dieser 3 Geraden den Winkel der beiden ersten.

Beweis. (Fig. 10.) Die Dreiecke $mf'd$ und $mf'c$ sind congruent, weil $md = mc = mf'$, $fd = fc = 2a$ und die Seite mf beiden gemeinsam ist. Die Winkel $mf'd$ und $mf'c$ sind also einander gleich.

II. Abschnitt.

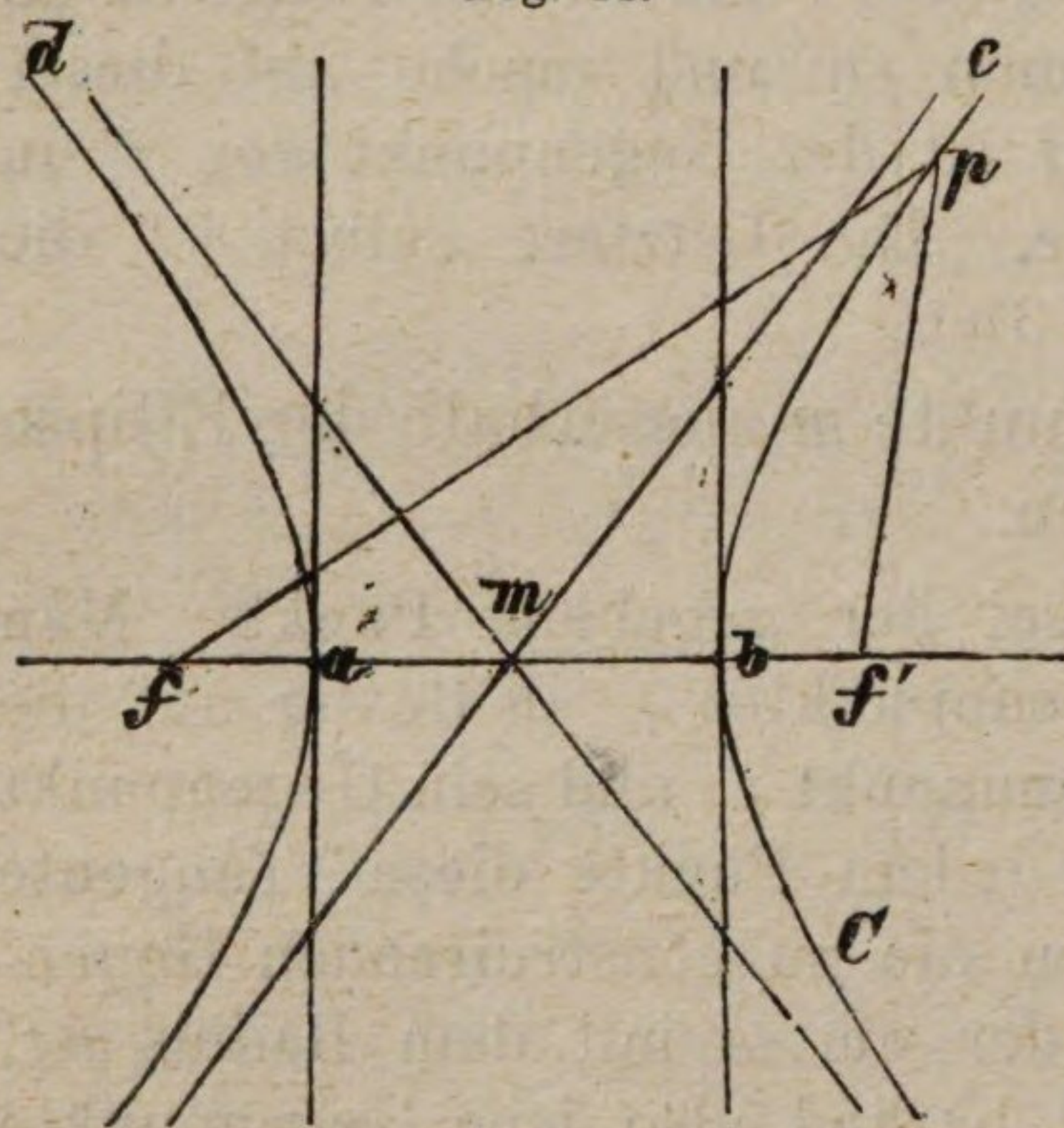
Die Hyperbel.

§ 4. Definition der Hyperbel. — Brennpunkte.

a) Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse hat.

Die beiden festen Punkte (f und f' in Fig. 11) heissen die Brennpunkte der Hyperbel. Diejenigen Strecken pf und pf' , welche einen Hyperbelpunkt mit den beiden Brennpunkten ver-

Fig. 11.



binden, heissen die Leitstrahlen des Punktes. Die Hälfte der gegebenen Länge, welcher die Differenz der Leitstrahlen eines Punktes immer gleich sein muss, wird gewöhnlich mit dem Buchstaben a bezeichnet. Der Abstand ff' der beiden Brennpunkte heisst die Excentricität der Hyperbel. Ein Punkt der Hyperbel bildet mit den beiden Brennpunkten ein Dreieck, dessen Grundlinie die Excentricität der Hyperbel ist, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch

die Leitstrahlen des Punktes dargestellt sind. Der Werth $2a$ der Differenz dieser Leitstrahlen muss daher (I, § 20c) kleiner als die Excentricität der Hyperbel sein.

b) Aufgabe. Beliebige viele Punkte einer Hyperbel zu construiren, wenn die beiden Brennpunkte und die Länge $2a$ gegeben sind.

Auflösung. r und r' seien zwei Strecken, deren Differenz der Länge $2a$ gleich ist. Man beschreibe mit dem Radius r um den Brennpunkt f (Fig. 11) einen Kreis und mit r' einen solchen um den Brennpunkt f' . Die Schnittpunkte dieser Kreise sind zwei Punkte der Hyperbel, deren Abstand von ff' senkrecht halbirt wird (I, § 34a). Verwechselt man bei dieser Construction die beiden Radien, so erhält man noch zwei andere Punkte der Hyperbel.

Es ist zu bemerken, dass die beiden Kreise sich nicht mehr schneiden, sobald r so klein genommen wird, dass die Summe $r + r'$ kleiner als die Excentricität ff' ist.

Anmerkung. Eine Erzeugung der Hyperbel durch stetige Bewegung eines Punktes ist die folgende: Man mache ein Lineal um den einen Brennpunkt f (Fig. 11) drehbar, so dass der Brennpunkt f genau in der Richtung der Kante des Lineals liegt. Auf dieser Kante nehme man in einer beträchtlichen Entfernung r den Punkt p an. In p befestige man einen Faden von einer solchen Länge r' , dass $r - r'$ gerade der Strecke $2a$ gleich ist. Das zweite Ende des Fadens befestige man in f' . Wenn man das Lineal so lange dreht, bis der Faden gespannt wird, so befindet sich der Punkt p offenbar auf der zu beschreibenden Hyperbel. Dreht man nun das Lineal allmählich gegen f' und hält man den dadurch sich lockernden Faden mit einem an dem Linealrande gleitenden Stifte gespannt, so beschreibt dieser Stift den Hyperbelbogen pb (Fig. 11).

Axen der Hyperbel.

§ 5.

a) Die Verbindungslinie der Brennpunkte (Hauptaxe) und die Mittelsenkrechte der Excentricität (Nebenaxe) der Hyperbel sind Symmetrieachsen der Figur. Der Schnittpunkt der Axen ist Mittelpunkt der Hyperbel.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse vollkommen analog.

b) Die Hauptaxe schneidet die Hyperbel in zwei Punkten (Scheitelpunkte der Hyperbel). Die Scheitelpunkte der Hauptaxe haben von dem Mittelpunkte der Hyperbel die Entfernung a . Die Nebenaxe trifft die Hyperbel nicht.

Beweis. (Fig. 11.) Wenn $ma = mb = a$, so liegen a und b auf der Hyperbel, denn $fb - f'b = fb - fa = ab = 2a$ (§ 4a). Die Nebenaxe, welche in die Mittelsenkrechte von ff' fällt, kann die Hyperbel nicht treffen, weil für ihre Punkte die Differenz der Leitstrahlen Null ist.

c) Zusatz. Die Tangenten der Hyperbel in den Scheitelpunkten der Hauptaxe stehen auf der Hauptaxe senkrecht.

Der Beweis ist demjenigen des entsprechenden Satzes für die Ellipse analog.

Tangenten der Hyperbel.

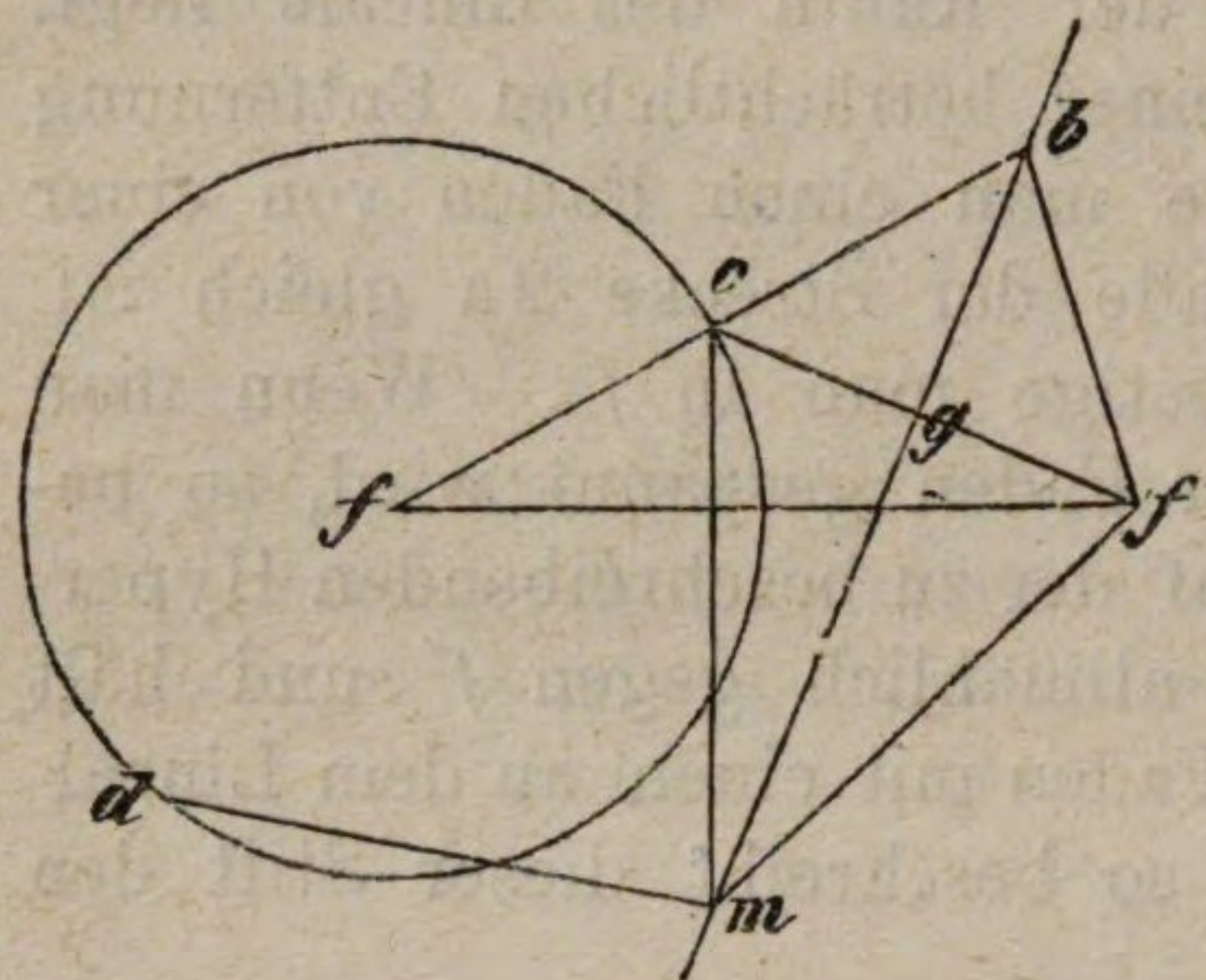
§ 6.

a) Wenn diejenige Strecke, welche den Gegenpunkt eines Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade mit dem andern

Brennpunkte verbindet, die Länge $2a$ hat, so wird die Hyperbel von dieser Geraden in einem Punkte berührt, welcher auf der Verlängerung jener Strecke liegt.

Beweis (Fig. 12). c sei der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die Gerade mg . Die Strecke fc habe die Länge

Fig. 12.



$2a$ und ihre Verlängerung treffe die Gerade mg in b . Dann ist b auf der Hyperbel gelegen, denn weil $bf' = bc$, so hat die Differenz $fb - f'b$ den Werth $fb - cb = fc = 2a$. Kein anderer Punkt m der Geraden mg kann auf der Hyperbel liegen, denn für ihn wäre $mf - mf' = mf - mc$ und die Differenz der Seiten mf und mc in dem Dreieck mfc ist kleiner als fc

oder $2a$. Die Gerade mg hat also den einzigen Punkt b mit der Hyperbel gemein, das heisst, sie berührt die Hyperbel in b .

b) Zusatz. Jeder Punkt desjenigen Kreises, welcher um einen Brennpunkt mit dem Radius $2a$ beschrieben ist, stellt den Gegenpunkt des andern Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Hyperbel dar.

c) Diejenigen Winkel, welche eine Tangente der Hyperbel mit den Leitstrahlen ihres Berührungspunktes bildet, sind gleich gross.

Beweis. Die Gleichheit der Winkel fbg und $f'bg$ folgt aus der Congruenz der Dreiecke cbg und $f'bg$.

d) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Hyperbel eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung (Fig. 12). b sei der gegebene Punkt. Man ziehe einen Leitstrahl fb des Punktes b (in diesem Falle den grösseren Leitstrahl) und schneide auf demselben die Länge $2a$ von f aus ab. Der gefundene Punkt c ist der Gegenpunkt des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchte Tangente. Diese selbst ist die Halbirungssenkrechte von cf' (§ 6, a und b).

e) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Hyperbel Tangenten an dieselbe zu legen.

Auflösung. Man beschreibe um den gegebenen Punkt m (Fig. 12) einen Kreis, der durch den einen Brennpunkt f' geht. Die Schnittpunkte c und d dieses Kreises und desjenigen, welcher

mit dem Radius $2a$ um f beschrieben ist, sind die Gegenpunkte des Brennpunktes f' in Bezug auf die gesuchten Tangenten. Diese selbst sind die Halbierungssenkrechten der Strecken $f'c$ und $f'd$. Der Beweis wird geführt, wie bei § 3 e.

f) Wenn man von einem Brennpunkte einer Hyperbel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden ersten.

Der Beweis ist demjenigen von § 3, f analog.

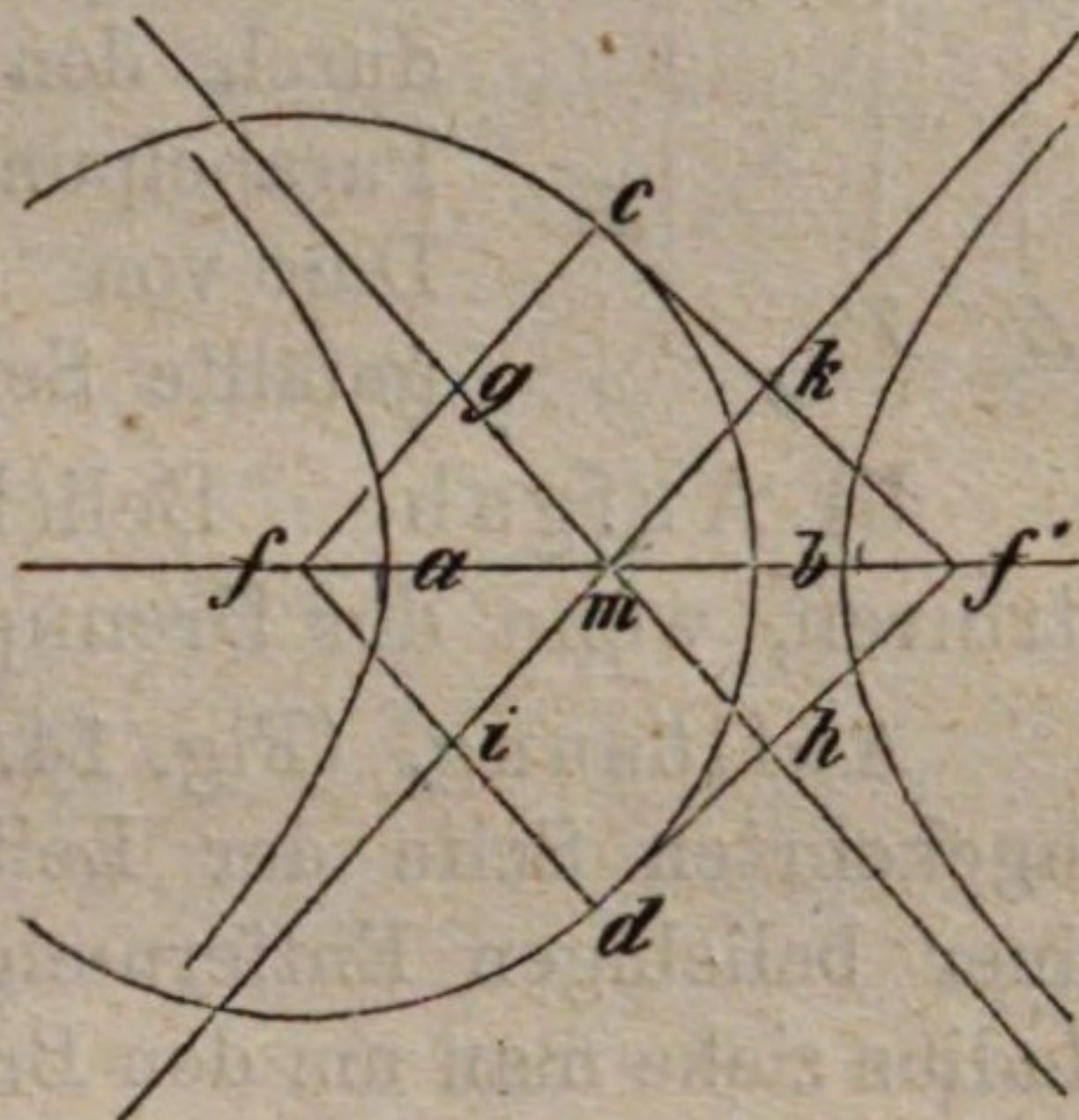
Die Asymptoten der Hyperbel.

§ 7.

a) Durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehen zwei Tangenten, welche die Hyperbel in unendlich fernen Punkten berühren, die Asymptoten der Hyperbel.

Beweis. Man ziehe um den Brennpunkt f (Fig. 13) mit dem Radius $2a$ einen Kreis und lege von f' die Tangenten $f'c$ und $f'd$ an denselben, c und d sind die Gegenpunkte zweier Tangenten ik und gh (§ 6 b), welche durch den Mittelpunkt m gehen (I, § 28 c). Da die Radien fc und fd mit den gefundenen Hyperbeltangenten parallel sind, so deuten sie unendlich ferne Berührungspunkte derselben an.

Fig. 13.



b) Zusatz. Die von einem Brennpunkte der Hyperbel auf eine Asymptote gefällte Senkrechte schneidet von dieser Asymptote ein Stück ab, welches der Hälfte der Hauptaxe gleich ist.

Beweis. Nach I, § 28 c ist mk (Fig. 13) die Hälfte von fc , woraus die Behauptung folgt, da $fc = 2a$.

c) Aufgabe. Eine Hyperbel zu zeichnen, wenn ihre Scheitelpunkte und die beiden Asymptoten bekannt sind.

Auflösung (Fig. 13). Man trage auf einer der Asymptoten von dem Mittelpunkte aus nach beiden Seiten die Längen $mk = mi = a$ ab und errichte in den erhaltenen Punkten k und i Senkrechte auf die Asymptote, welche nach b) die Hauptaxe in den beiden Brennpunkten treffen. Sodann verfähre man nach § 4 b.

dadurch gespannt, dass man ihn mit einem Stifte gegen die Kathete (ac) des Winkeldreiecks andrückt. Der an dieser Kathete hingleitende Stift wird dabei einen Bogen der Parabel beschreiben.

c) Die Punkte der Parabel liegen paarweise symmetrisch gegen die Axe der Parabel. Die Axe trifft die Parabel nur in einem Punkte, dessen Tangente auf der Axe senkrecht steht. — (Scheitelpunkt und Scheiteltangente der Parabel.)

Beweis. (Fig. 14.) Dass dg die Mittelsenkrechte von ab ist, folgt unmittelbar aus der Construction der Parabelpunkte a und b . Derjenige Punkt s der Axe, welcher in der Mitte zwischen dem Brennpunkte der Parabel und der Leitlinie liegt, ist offenbar der einzige Punkt, welchen die Axe mit der Parabel gemein haben kann. Die Scheiteltangente T (Fig. 14) steht senkrecht auf der Axe, denn die bei der Construction der Parabelpunkte erhaltene Sehne ab , welche durch die Axe der Parabel senkrecht halbiert wird, geht in die Scheiteltangente über, sobald der eine Endpunkt dieser Sehne sich dem Scheitelpunkte unbegrenzt nähert.

Tangenten an die Parabel.

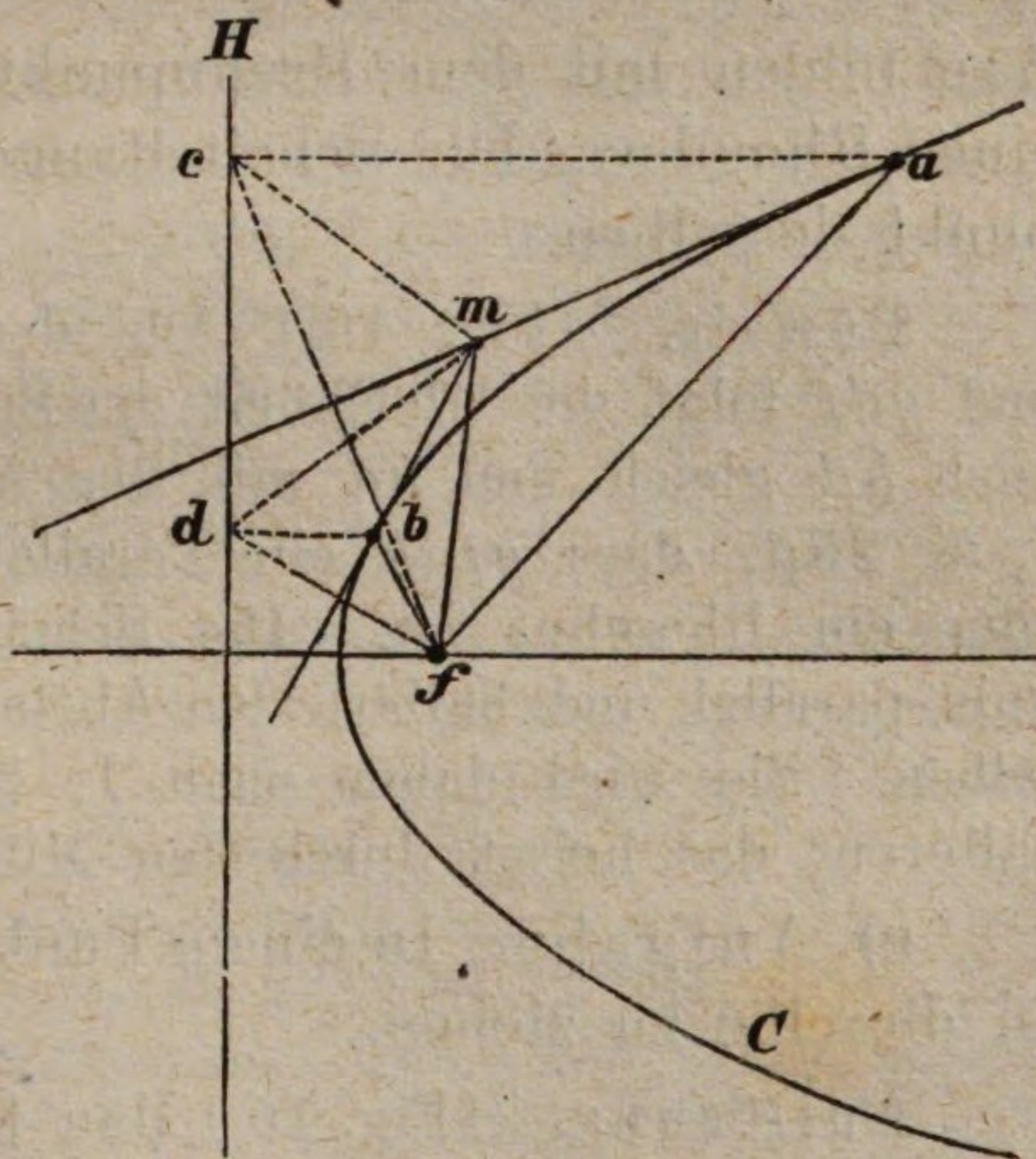
§ 9.

a) Wenn der Gegenpunkt des Brennpunktes in Bezug auf eine Gerade auf der Leitlinie gelegen ist, so wird die Parabel von der Geraden berührt. Der Berührungspunkt liegt auf einer durch den Gegenpunkt mit der Axe parallel gezogenen Geraden.

Beweis. (Fig. 15.) Der Punkt c sei auf der Leitlinie H der Parabel gelegen und am sei die Halbierungssenkrechte von fc . ca sei mit der Axe der Parabel parallel, also auf der Leitlinie senkrecht.

Dann ist (I, § 23a) $ac = af$, das heisst, der Punkt a ist auf der Parabel gelegen. Wäre noch ein anderer Punkt m der Geraden am auf der Parabel gelegen, so müsste die Strecke mc der senkrechten Entfernung des Punktes m von der Leitlinie gleich sein, weil beide, bezüglich nach I, § 23a und der Definition der Parabel der Strecke mf gleich sein würden. Dies widerspricht aber I, § 20b und m

Fig. 15.

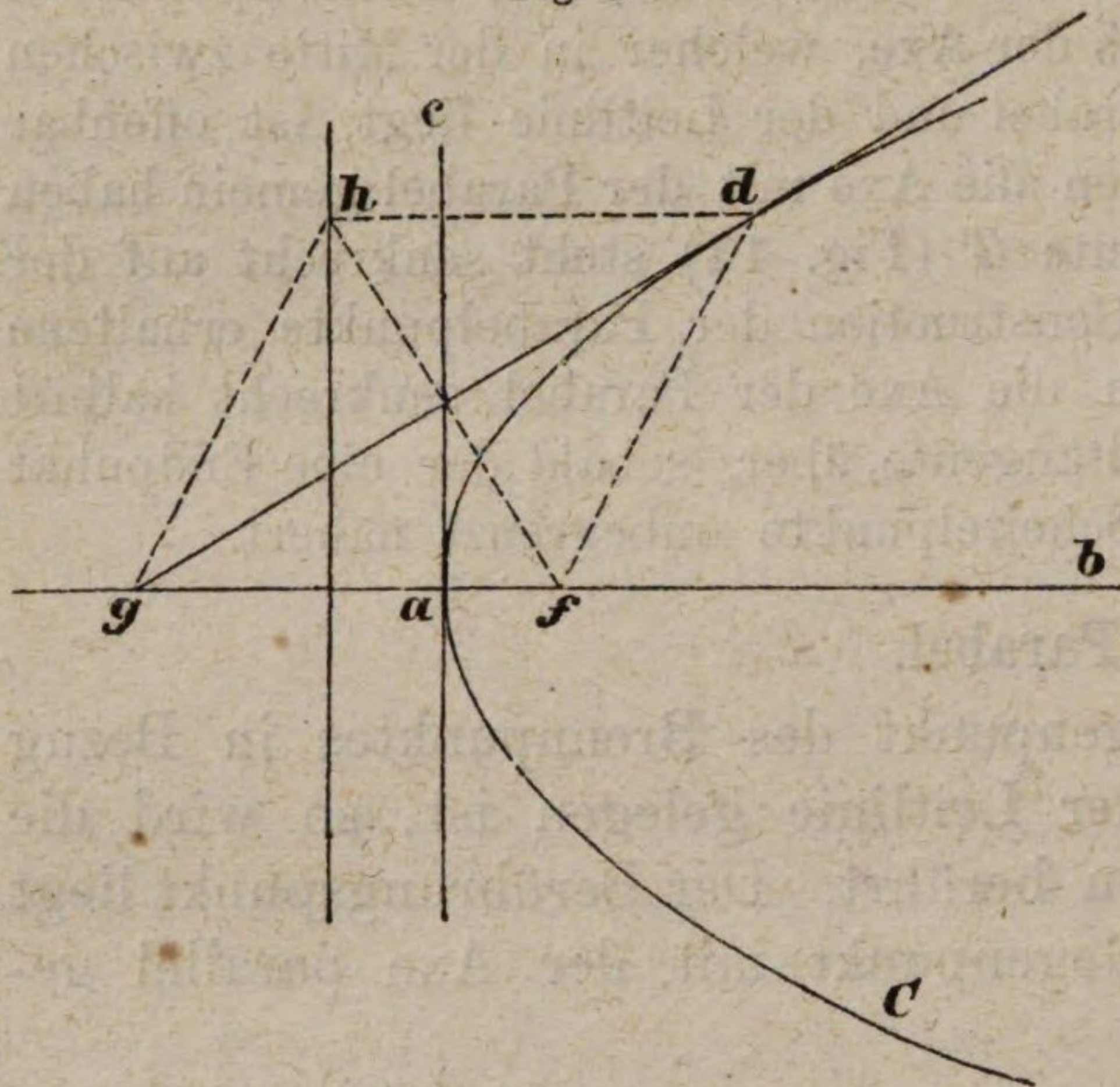


kann folglich kein Punkt der Parabel sein. Die Gerade am hat also den einzigen Punkt a mit der Parabel gemein, das heisst, sie ist die Tangente der Parabel in diesem Punkte.

b) Zusatz. Jeder Punkt der Leitlinie ist Gegenpunkt des Brennpunktes in Bezug auf eine Tangente der Parabel.

c) Diejenigen Winkel, welche die Tangente mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und der Axe der Parabel bildet, sind gleich gross.

Fig. 16.



Beweis. (Fig. 16.)

Wenn d der Berührungspunkt der Tangente dg und h der Gegenpunkt von f in Bezug auf dg ist, so ist hd mit der Axe ab parallel (a). Aus der Gleichheit der Winkel hdg und gdf (I, § 18d) und der Gleichheit der Wechselwinkel hdg und dgb (I, § 9α) folgt die Behauptung.

d) Zusatz. Der Berührungspunkt der Tangente und ihr Schnittpunkt mit der Axe bilden mit dem Brennpunkte und seinem Gegenpunkte einen Rhombus. Die Scheiteltangente geht durch den Mittelpunkt desselben.

Axe bilden mit dem Brennpunkte und seinem Gegenpunkte einen Rhombus. Die Scheiteltangente geht durch den Mittelpunkt desselben.

Beweis. (Fig. 16.) Aus der Gleichheit der Winkel dgf und gdf folgt die Gleichheit der Seiten gf und fd . Da aber fd auch hd gleich und hd mit der Axe parallel ist, so folgt aus I, § 25β, dass $gfdh$ ein Parallelogramm mit gleichen Seiten oder ein Rhombus ist. Die Scheiteltangente ist mit der Leitlinie parallel und halbirt den Abstand des Brennpunktes von derselben. Sie wird daher nach I, § 28c auch die Diagonale hf halbiren, das heisst durch den Mittelpunkt des Rhombus gehen.

e) Aufgabe. In einem Punkte der Parabel die Tangente an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 15.) Man fälle von dem Punkte a , dessen Tangente bestimmt werden soll, eine Senkrechte ac auf die Leitlinie und ziehe den Leitstrahl af . Die Tangente halbirt den gebildeten Winkel caf (c).

f) Aufgabe. Von einem Punkte ausserhalb der Parabel Tangenten an dieselbe zu ziehen.

Auflösung. (Fig. 15.) m sei der gegebene Punkt. Die Gegenpunkte der gesuchten Tangenten sind die Schnittpunkte c und d der Leitlinie und eines um m mit dem Radius mf beschriebenen Kreises (§ 9, a und b). Die Tangenten selbst sind die Halbirungsenkrechten der Strecken fc und fd .

g) Aufgabe. Eine Parabel zu zeichnen, von welcher der Scheitelpunkt und ein beliebiger anderer Punkt, sowie die Tangenten dieser Punkte gegeben sind.

Auflösung. (Fig. 16.) a sei der Scheitelpunkt und d der zweite gegebene Punkt. ac und dg seien die Tangenten dieser Punkte. Man errichte in dem Schnittpunkt beider Tangenten eine Senkrechte auf dg , so wird dieselbe mit der in a auf der Scheiteltangente errichteten Senkrechten ab den Brennpunkt f bestimmen. Der Gegenpunkt h des Brennpunkts in Bezug auf die Tangente dg ist auf der Leitlinie gelegen. Die Parabel kann nun nach § 8b. construirt werden.

h) Wenn man von dem Brennpunkte einer Parabel gerade Linien nach den Berührungspunkten zweier Tangenten und nach ihrem Schnittpunkte zieht, so halbirt die letzte dieser drei Geraden den Winkel der beiden andern.

Beweis. (Fig. 15.) Nach der Auflösung zu Aufgabe f) ist cmd ein gleichschenkliges Dreieck. Die Winkel acm und bdm sind gleich, weil sie die Winkel an der Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreiecks zu 90° ergänzen. Da nun aber $\angle acm = afm$ und $\angle bdm = bfm$, so müssen auch die Winkel afm und bfm einander gleich sein, was zu beweisen war.

Uebungen.

§ 10.

1) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen und einen gegebenen Kreis K berühren, wenn

- α) m innerhalb K gelegen ist,
- β) m ausserhalb K gelegen ist.

2) Die Brennpunkte und die grosse Axe einer Ellipse (Hyperbel) sind gegeben. Man soll die Schnittpunkte dieser Curve mit einer gegebenen Geraden bestimmen. Zur Auflösung sollen § 10, 1 und I § 91 d. *) verwendet werden.

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch 2 gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

3) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen und eine gegebene Gerade G berühren.

4) Der Brennpunkt und die Leitlinie einer Parabel sind gegeben. Man soll die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit der Curve finden. Zur Auflösung sollen § 10, 3 und I § 84a*) verwendet werden.

5) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K und K' ungleichartig berühren, wenn

α) K von K' eingeschlossen wird, ... (Ellipse).

β) K und K' sich schneiden, ... (Ellipse).

γ) K und K' sich ausschliessen ... (Hyperbel).

6) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise K und K' gleichartig berühren, wenn

α) K von K' eingeschlossen wird, ... (Ellipse).

β) K und K' sich schneiden, ... (Hyperbel).

γ) K und K' sich ausschliessen. (Hyperbel).

7) Welches ist der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte je zweier Radien der Kreise K und K' , wenn diese Radien nach Punkten gezogen sind, welche

α) für den innern Aehnlichkeitspunkt von K und K' invers sind (I. § 102c**),

β) für den äussern Aehnlichkeitspunkt von K und K' invers sind.

Andeutung. Diese geometrischen Oerter fallen mit denjenigen von 5) und 6) zusammen.

8) Wo befinden sich die Scheitelpunkte der grossen Axe bei denjenigen Ellipsen oder Hyperbeln, welche die geometrischen Oerter 5), 6), 7) darstellen.

Antwort. In der Mitte zwischen je zwei inversen Punkten der Centralen.

9) Eine Ellipse (Hyperbel) als geometrischen Ort nach 5), 6) oder 7) darzustellen, wenn die Brennpunkte f und f' , sowie ein Scheitelpunkt s der grossen Axe gegeben ist.

Andeutung. f und f' müssen die Mittelpunkte von K und K' sein. Ausserdem müssen zwei Punkte der Centralen ff' , welche von s gleichweit abstehen, als inverse Punkte von K und K' angenommen werden.

10) Die Aufgabe 9) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge desshalb noch die Bedingung hinzu, dass

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch 2 gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

**) Wenn man durch einen Aehnlichkeitspunkt von K und K' eine Secante dieser Kreise zieht, so werden je zwei nicht homologe Punkte dieser Secante inverse Punkte genannt.

- α) K und K' sich berühren.
- β) K einen gegebenen Radius hat.
- γ) K zu einem Punkte zusammenschrumpft.

(Vergleiche § 10, 1.)

11) Eine Ellipse oder Hyperbel zu construiren, wenn gegeben sind:

- α) Die Brennpunkte f und f' und ein Curvenpunkt a (zwei Auflösungen).
- β) Ein Brennpunkt f , die Richtung der grossen Axe und zwei Curvenpunkte a und b (zwei Auflösungen).
- γ) Ein Brennpunkt f und drei Curvenpunkte a, b, c (vier Auflösungen).

Andeutung. Die Auflösungen geschehen durch 5) und 6). Bei α) ziehe man die Kreise K und K' beide durch a ; f und f' sind ihre Mittelpunkte. Bei β) ziehe man K und K' durch a ; f ist Mittelpunkt von K ; K' hat seinen Mittelpunkt auf der grossen Axe und berührt einen leicht zu bestimmenden Kreis (I. § 91 d*). Bei γ) ziehe man beide Kreise durch a ; K hat seinen Mittelpunkt in f ; K' muss zwei leicht zu findende Kreise berühren (I. § 108, 21**).

12) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade G und einen gegebenen Kreis K berühren.

Andeutung. Dieser geometrische Ort wird durch zwei Parabeln gebildet.

13) Eine Parabel als geometrischen Ort nach 12) darzustellen, wenn der Brennpunkt und der Scheitelpunkt gegeben sind.

14) Die Aufgabe 13) kann auf beliebig viele Weisen gelöst werden. Man füge desshalb noch die Bedingung hinzu, dass

- α) G und K sich berühren,
- β) K einen gegebenen Radius hat,
- γ) K zu einem Punkt zusammenschrumpft (§ 10, 3).

15) Eine Parabel als geometrischen Ort nach 12) darzustellen, wenn dieselbe durch zwei Punkte a und b eines Kreises K gehen und ihr Brennpunkt in dem Mittelpunkt dieses Kreises liegen soll.

Andeutung. K wird als erzeugender Kreis angenommen. Die Gerade G ist durch die Verbindungslinie ab dargestellt.

16) Eine Parabel zu construiren, wenn gegeben ist:

- α) der Brennpunkt f , ein Curvenpunkt und die Axenrichtung (zwei Auflösungen. — § 10 15.),
- β) der Brennpunkt f und zwei Curvenpunkte a und b .

*) Von den beiden Kreisen, welche durch 2 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kreis berühren, den einen zu finden, wenn der andere (K) schon bekannt ist.

**) Von den beiden Kreisen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise gleichartig (bezüglich ungleichartig) berühren, den einen zu finden, wenn der andere (K) schon bekannt ist.

Andeutung zu β). Die Auflösung geschieht nach 12). Man ziehe K und G durch den Punkt a ; f ist der Mittelpunkt von K ; G muss einen leicht anzugebenden Kreis berühren (zwei Auflösungen).

17) Die Mittelsenkrechten derjenigen Secantenabschnitte, welche von einem Punkte m bis zu der Peripherie eines Kreises K reichen, sind Tangenten an eine Curve. Welches ist diese Curve, wenn

α) m ausserhalb K gelegen ist (Hyperbel),

β) m innerhalb K gelegen ist (Ellipse).

18) Bei dem geometrischen Orte in 7) sind die Mittelsenkrechten der zwischen den inversen Punkten enthaltenen Strecken entweder Tangenten oder Normalen der Curvenpunkte.

Anmerkung. Die in einem Curvenpunkte auf die Tangente errichtete Senkrechte heisst die Normale dieses Curvenpunktes.

19) Es gibt unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, welche zwei gegebene Punkte f und f' zu Brennpunkten haben (confocale Curven). Eine beliebige unter den Ellipsen schneidet keine andere Ellipse, aber sie schneidet alle Hyperbeln rechtwinklig. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine der Ellipsen und eine der Hyperbeln (§ 10, 11 α).

20) Eine Ellipse oder Hyperbel zu construiren, wenn ein Brennpunkt f gegeben ist und

α) drei Tangenten A, B, C der Curve,

β) zwei Tangenten A, B und der Berührungspunkt m auf A ,

γ) zwei Curvenpunkte m, n und die Tangente A in m (zwei Auflösungen).

Andeutungen. α) der andere Brennpunkt f' ist der Mittelpunkt des durch die Gegenpunkte von f in Bezug auf A, B und C bestimmten Kreises. β) f' ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die Gegenpunkte von f in Bezug auf A und B geht. Die Richtung des dem ersteren Gegenpunkte zugehörigen Radius ist durch m bestimmt. γ) f' ist der Mittelpunkt eines Kreises K , welcher durch den Gegenpunkt von f in Bezug auf A geht. Die Richtung des zugehörigen Radius ist durch m bestimmt. K muss ferner einen um n mit dem Radius nf beschriebenen Kreis berühren.

21) An eine Ellipse oder Hyperbel eine Tangente mit einer gegebenen Geraden parallel zu legen (zwei Auflösungen).

22) An diese Curven Tangenten zu ziehen, welche α) einen gegebenen Winkel mit einander bilden, β) senkrecht auf einander stehen.

23) Wenn die Berührungspunkte zweier Tangenten mit einem Brennpunkte in einer Geraden liegen, so steht die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Schnittpunkte der Tangenten auf der Berührungssehne senkrecht (§ 3 f , § 6 f , § 9 h .)

24) Die Fusspunkte der von einem Brennpunkte einer Ellipse auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einem Kreise.

25) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einem Kreise bewegt und der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel.

26) Welche Curve wird von den Mittelsenkrechten derjenigen Strecken berührt, welche von einem gegebenen Punkte p bis zu einer gegebenen Geraden G reichen?

27) Eine Parabel zu construiren, wenn der Brennpunkt und α) zwei Tangenten, β) eine Tangente mit ihrem Berührungspunkte gegeben sind.

28) An eine Parabel eine Tangente zu legen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

29) An eine Parabel Tangenten zu legen, welche

α) einen gegebenen Winkel bilden,

β) senkrecht auf einander stehen.

30) Welches ist der geometrische Ort für die Schnittpunkte solcher senkrecht auf einander stehender Tangenten.

31) Die Fusspunkte der von dem Brennpunkte einer Parabel auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einer Geraden.

32) Wenn der Scheitel eines rechten Winkels sich auf einer Geraden bewegt und ein Schenkel durch einen festen Punkt geht, so berührt der andere eine Parabel.

33) Die Berührungssehne der von einem Punkte der Leitlinie gezogenen Tangenten geht durch den Brennpunkt der Parabel.

Zweiter Coursus.

Die Grundgebilde der neueren Geometrie.

I. Abschnitt.

Harmonische Punkte und Strahlen. — Das vollständige Viereck und Vierseit.

Harmonische Punkte und Strahlen.

§ 11.

a) Erklärung. Vier Punkte a, c, b, d , (Fig. 17) heissen „harmonische Punkte“, wenn die Strecke ab in c und d innen und aussen nach demselben Verhältniss getheilt wird.

α) Erklärung. Vier Strahlen A, C, B, D , (Fig. 17) heissen „harmonische Strahlen“, wenn sie von demselben Punkte s nach 4 harmonischen Punkten a, c, b, d , gezogen sind.

Anmerkung zu a). Dann wird auch die Strecke cd ihrerseits in a und b innen und aussen nach demselben Verhältniss getheilt (Einleitung § 2 Anmerkung).

Die Punkte a und b, c und d heissen zugeordnete Punkte. Zwei zugeordnete Punkte sind durch einen der übrigen von einander getrennt.

Die Strahlen A und B, C und D heissen zugeordnete Strahlen. Zwei zugeordnete Strahlen sind durch je einen der übrigen von einander getrennt.

Fig. 17.

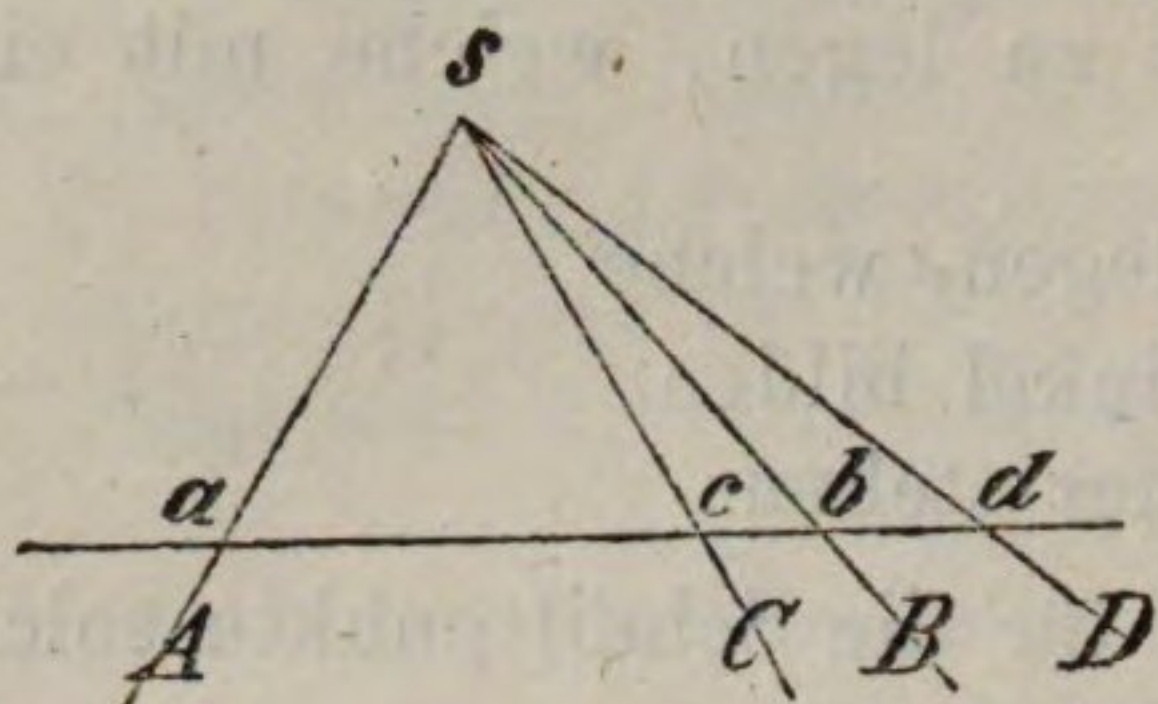
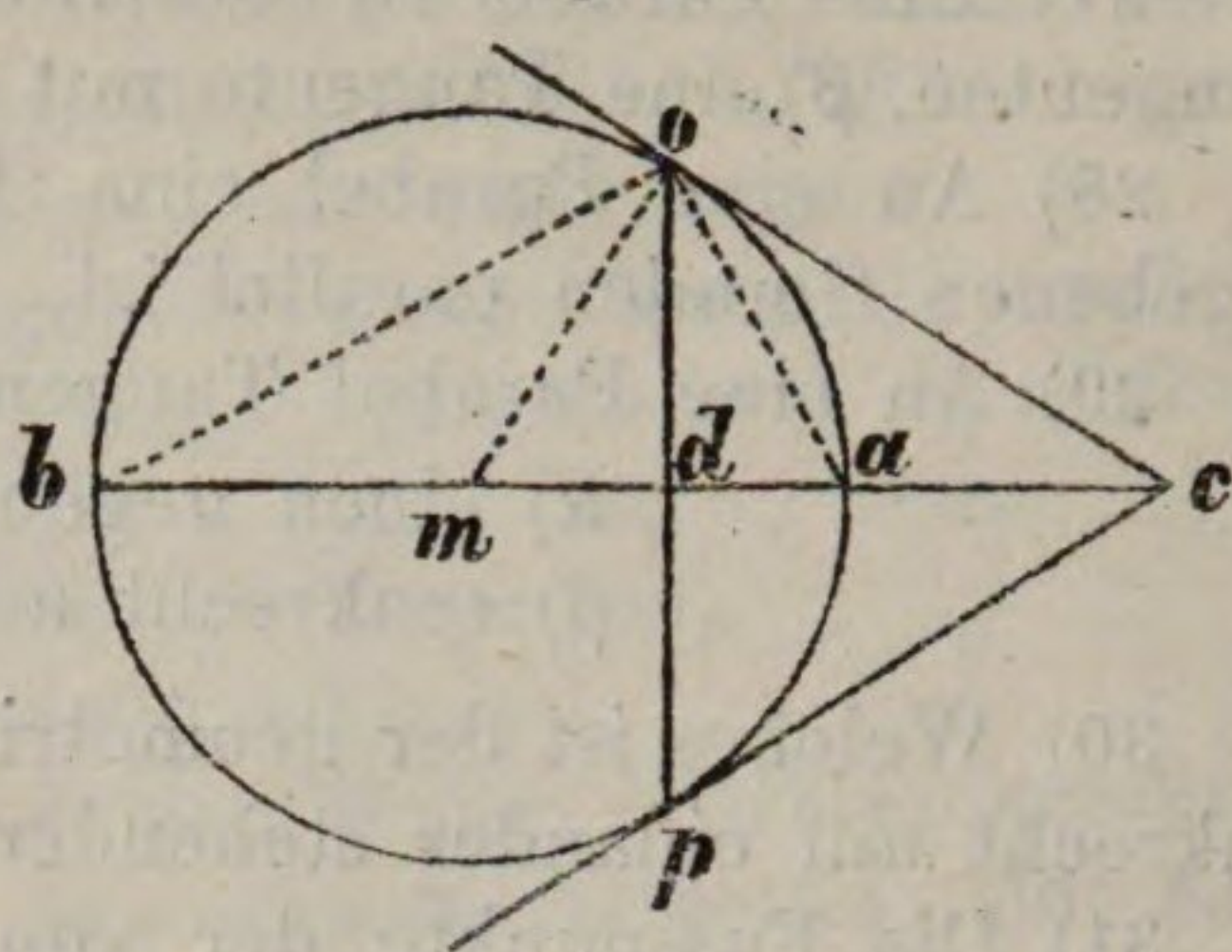


Fig. 18.



1. Beispiel.

b) Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels theilen die gegenüberliegende Seite harmonisch (Einleitung § 2a und § 11a).

β) Zwei convergente Gerade und die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bilden 4 harmonische Strahlen (§ 11, b und α).

2. Beispiel.

c) Ein Punkt c ausserhalb des Kreises und seine Berührungssehne theilen den durch c gezogenen Durchmesser harmonisch.

Beweis. Man erkennt leicht, dass in dem Dreieck doc der Winkel bei o und sein Nebenwinkel durch die Geraden oa und ob halbirt wird. Die Behauptung folgt also aus b).

Anmerkung. Da od die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks moc ist, so gilt die Gleichung

$$\overline{mo}^2 = \overline{ma}^2 = \overline{mb}^2 = \overline{mc} \cdot \overline{md}$$

Dieselbe ist auch noch richtig, wenn man die Vorzeichen der Strecken (Einleit. § 1) berücksichtigt, d. h. wenn $acbd$ 4 harmonische Punkte und m die Mitte von ab ist, so gilt die Gleichung $(ma)^2 = (mb)^2 = (mc)(md)$. Dieser Satz kann auch umgekehrt werden. Zum Beweise zeichne man unter der Voraussetzung $(ma)^2 = (mb)^2 = (mc)(md)$ einen Kreis über ab als Durchmesser, errichte in d die senkrechte Sehne op und ziehe co . Aus der Beziehung $mo^2 = mb^2 = mc \cdot md$ folgt leicht, dass das Dreieck moc bei o rechtwinklig und daher oc eine Tangente des Kreises ist. Die Behauptung ergibt sich also aus c).

§ 12. Fortsetzung.

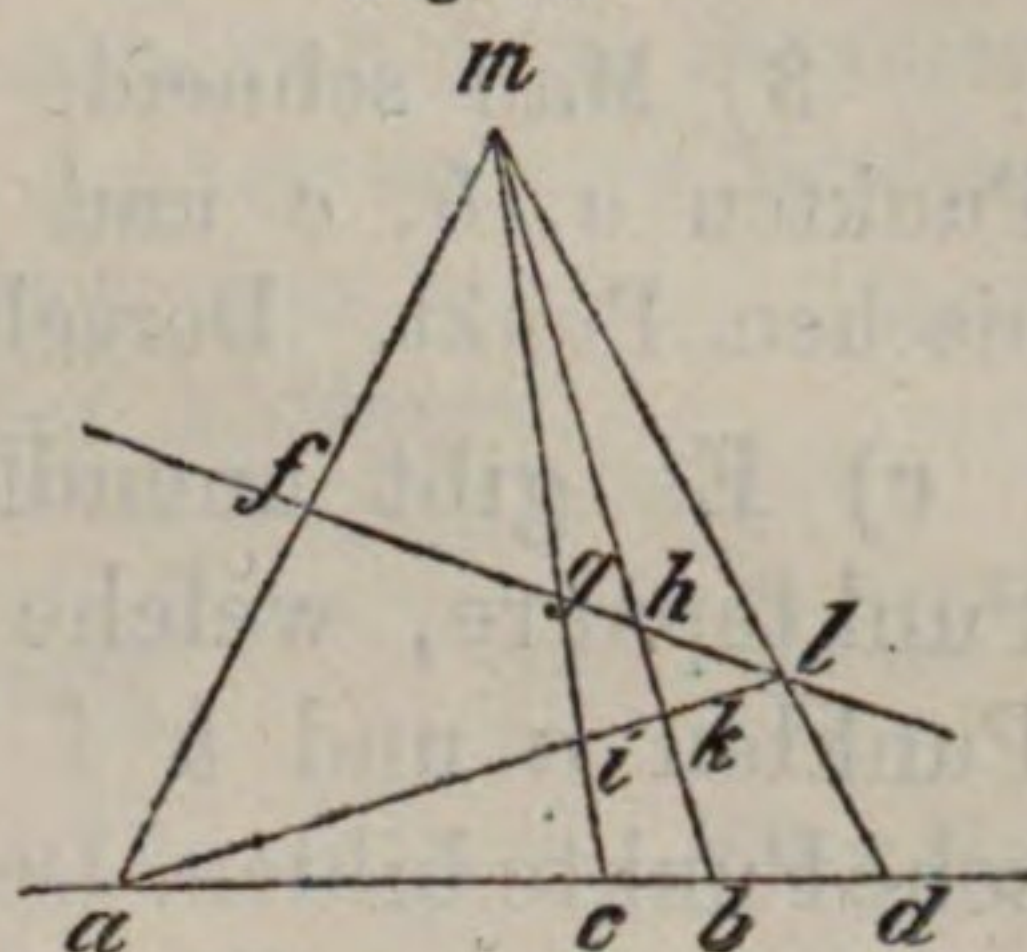
a) Vier harmonische Punkte einer Geraden g werden aus jedem Punkte, der nicht auf

α) Vier harmonische Strahlen eines Punktes m werden von jeder Geraden, welche

g gelegen ist, durch 4 harmonische Strahlen projicirt. | nicht durch m geht, in 4 harmonischen Punktengeschnitten.

Beweis. Die Behauptung unter $a)$ enthält nur die Erklärung in § 11 α . Um $\alpha)$ zu beweisen bedenke man, dass 4 harmonische Strahlen durch Verbindung von 4 harmonischen Punkten a, c, b, d (Fig. 19) mit einem Punkte m entstanden sind. Man hat nun 2 Fälle zu unterscheiden:

Fig. 19.



1. Fall. Die Gerade, welche die 4 harmonischen Strahlen schneidet, geht durch einen der 4 Punkte a, c, b, d , zum Beispiel durch a . Dann können die Geraden mc und md als Transversalen des Dreiecks akb angesehen werden. Daher ist sowohl das Product der Abstandsverhältnisse $mk : mb, cb : ca, ia : ik$, als auch dasjenige der Abstandsverhältnisse $mk : mb, db : da, la : lk$ der Einheit gleich (Einleitung §. 3 a). Da aber das Verhältniss $mk : mb$ in jedem dieser gleichen Producte den ersten Factor bildet und die zweiten Factoren wegen $cb : ca = db : da$ (§. 11 a) gleich sind, so müssen auch die beiden übrigen Factoren, nämlich die Verhältnisse $ia : ik$ und $la : lk$ gleich sein, worin die Behauptung gelegen ist.

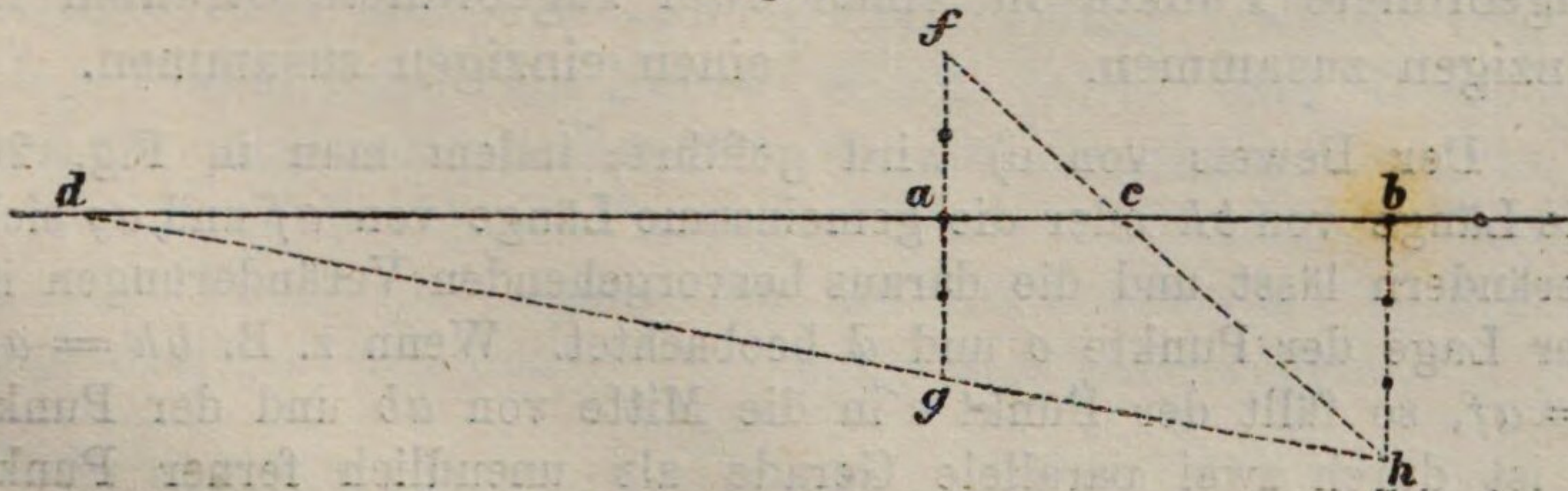
2. Fall. Diejenige Gerade, welche die 4 Strahlen (in den Punkten f, g, h, l) schneidet, geht durch keinen der 4 Punkte a, c, b, d . In diesem Falle verbinde man den einen (l) der 4 Schnittpunkte mit einem (a) der Punkte a, c, b, d . Durch zweimalige Anwendung des ersten Falles erweist sich nun die Behauptung.

b) Aufgabe. Es sind 3 Punkte abc einer Geraden gegeben. Man soll den zu c zugeordneten 4ten harmonischen Punkt finden.

β) Aufgabe. Es sind 3 Strahlen ABC eines Punktes gegeben. Man soll den zu C zugeordneten 4ten harmonischen Strahl finden.

Auflösung. $b)$ Man ziehe durch die Punkte a und b zwei Parallelen (in der Figur 20 sind dieselben senkrecht zu ab) und

Fig. 20.



schneide sie mit einer durch c gezogenen Geraden in f und h . Macht man $ag = af$, so bestimmt die Gerade hg auf ab den gesuchten Punkt d (I, § 63a. II, § 11a).

3) Man schneide die 3 Strahlen durch eine Gerade in drei Punkten a, b, c und suche den zu c zugeordneten 4ten harmonischen Punkt. Derselbe bestimmt den gesuchten Strahl (§ 11a).

c) Es gibt unendlich viele Punktpaare, welche mit den Punkten a und b 4 harmonische Punkte bilden. Dem Mittelpunkt m der Strecke ab gehört der unendlich ferne Punkt der Geraden als vierter harmonischer Punkt zu.

Wenn der Punkt c aus der Mitte vor ab gegen a rückt, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt d von links her aus unendlicher Ferne gegen a um zugleich mit c in a einzutreffen.

Wenn sich der Punkt c aus der Mitte von ab gegen b bewegt, so rückt der vierte harmonische Punkt von rechts her aus unendlicher Ferne gegen b um zugleich mit c in b anzukommen.

In a , wie in b , fallen je zwei zugeordnete Punkte in einen einzigen zusammen.

Der Beweis von c) wird geführt, indem man in Fig. 20 die Länge von bh oder die gemeinsame Länge von af und ag sich verändern lässt und die daraus hervorgehenden Veränderungen in der Lage der Punkte c und d beobachtet. Wenn z. B. $bh = ag = af$, so fällt der Punkt c in die Mitte von ab und der Punkt d ist durch zwei parallele Gerade als unendlich ferner Punkt

γ) Es gibt unendlich viele Strahlenpaare, welche mit den Strahlen A und B 4 harmonische Strahlen bilden. Der Halbirungslinie M eines von A und B gebildeten Winkels gehört die Halbirungslinie des Nebenwinkels als 4ter harmonischer Strahl zu.

Wenn sich der Strahl C von der Halbirungslinie M weg gegen A dreht, so bewegt sich der 4te harmonische Strahl in entgegengesetzter Drehungsrichtung ebenfalls gegen A um zugleich mit C in A einzutreffen.

Wenn sich der Strahl C von der Halbirungslinie M weg gegen B dreht, so bewegt sich der 4te harmonische Strahl D in entgegengesetzter Drehungsrichtung ebenfalls gegen B um zugleich mit C in B anzukommen.

In A , wie in B , fallen je zwei zugeordnete Strahlen in einen einzigen zusammen.

bestimmt. (I, § 10*). Was den Beweis von γ) anbelangt, so ist die zweite Behauptung schon in § 11 β enthalten. Die übrigen ergeben sich leicht aus c) mit Hülfe von § 11 α .

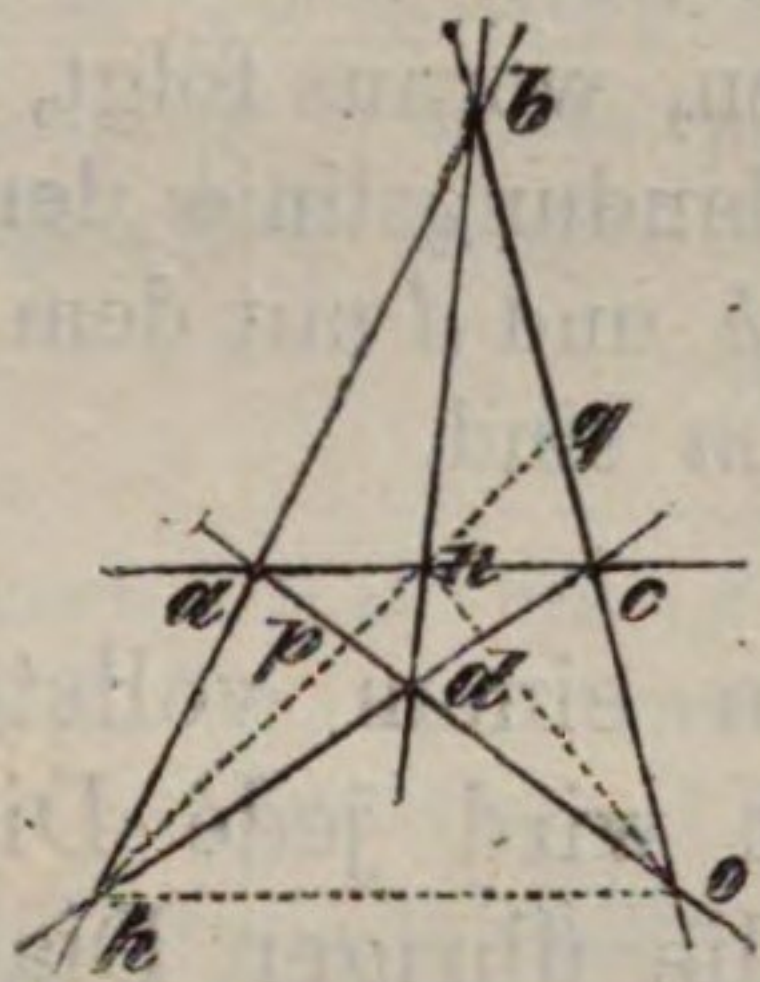
Anmerkung. Aus γ folgt zugleich, dass von allen Strahlenpaaren, welche mit zwei gegebenen Geraden 4 harmonische Strahlen bilden, nur dasjenige einen rechten Winkel einschliesst, dessen Strahlen die Winkel der gegebenen Geraden halbiren.

Das vollständige Viereck und Vierseit.

§ 13.

a) Erklärungen. Vier Punkte a, b, c, d , (Fig. 21) von welchen nicht 3 auf einer Geraden liegen, können als Ecken eines „vollständigen Vierecks“ angesehen werden. Die 6 Geraden ab, bc, cd, da, db, ac , welche diese Punkte paarweise verbinden, sind die Seiten des vollständigen Vierecks.

Fig. 21.

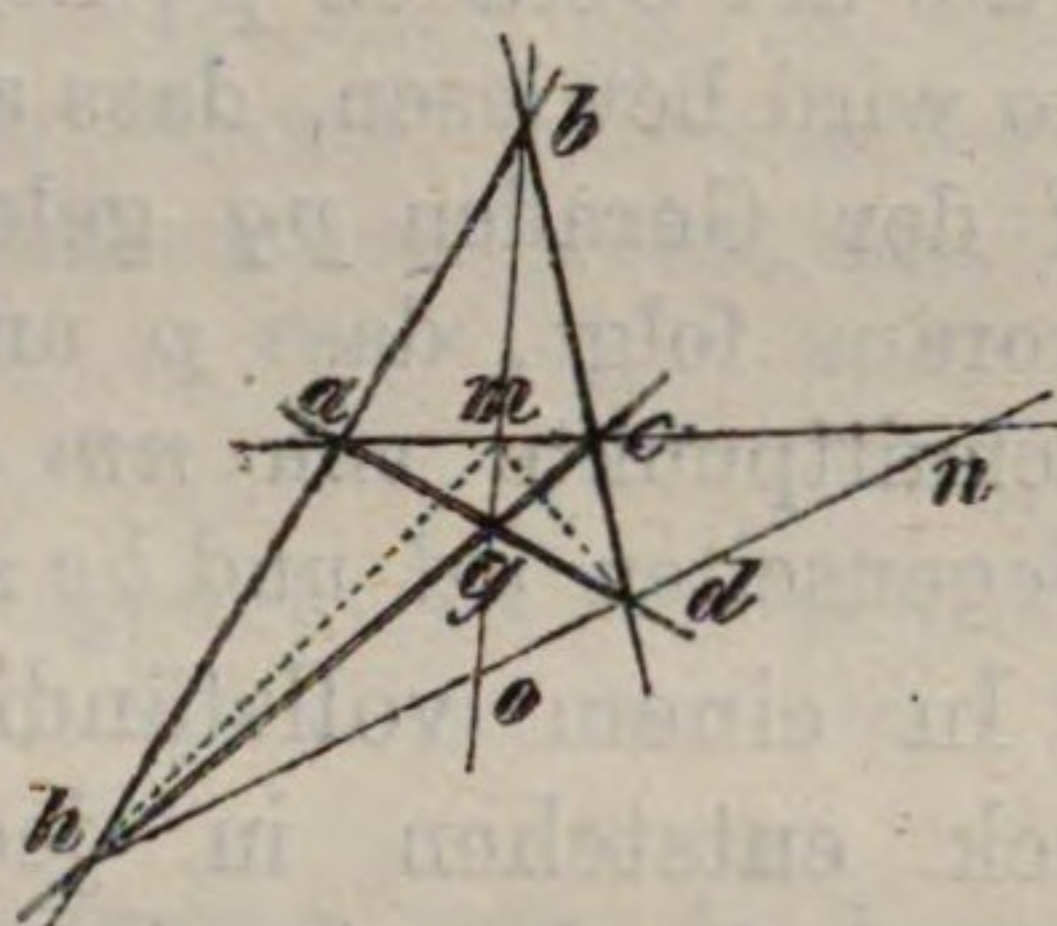


Je zwei Seiten des Vierecks, welche sich nicht in einem Eckpunkte desselben schneiden, wie ad und bc , heissen Gegenseiten. Der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heisst ein Nebeneck des vollständigen Vierecks.

Ein vollständiges Viereck hat drei Paare von Gegenseiten und drei Nebenecken.

α) Erklärungen. Vier Gerade ab, bc, cg, ga , (Fig. 22) von welchen nicht 3 durch einen Punkt gehen, können als Seiten eines „vollständigen Vierseits“ betrachtet werden. Die 6 Punkte a, b, c, g, d, h , in welchen sich diese Geraden paarweise schneiden, sind die Ecken des vollständigen Vierseits.

Fig. 22.



Je zwei Ecken des Vierseits, deren Verbindungslinie keine Seite desselben ist, wie a und c , heissen Gegenecken. Die Verbindungslinie zweier Gegenecken heisst eine Diagonale des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit hat drei Paare von Gegenecken und drei Diagonalen.

*) oder II, § 22a.

b) Auf zwei Gegenseiten (ad und bc in Fig. 21) eines vollständigen Vierecks entstehen durch das Nebeneck (o), in welchem sie sich schneiden, und durch ihre Schnittpunkte mit der Verbindungslinie (nh) der übrigen Nebenecken 4 harmonische Punkte.

β) In zwei Gegenpunkten (h und d in Fig. 22) eines vollständigen Vierseits entstehend durch die Diagonale (hd), auf welcher sie liegen, und durch ihre Verbindungslinien mit dem Schnittpunkte (m) der übrigen Diagonalen je 4 harmonische Strahlen.

Beweise.

Man denke sich auf jeder der Geraden ad und bc den zu o zugeordneten 4ten harmonischen Punkt bestimmt. Diese Punkte p und q müssen alsdann beide in denjenigen Strahl des Punktes m fallen, welcher mit mo zusammen die Winkel der Geraden ac und bd harmonisch theilt (§. 12a), d. h. m muss auf der Geraden pq liegen. Ebenso wird bewiesen, dass auch n auf der Geraden pq gelegen ist, woraus folgt, dass p und q die Schnittpunkte von nm mit den Gegenseiten ad und bc sind.

c) In einem vollständigen Viereck entstehen in jedem Nebeneck durch seine Verbindungslinien mit den übrigen Nebenecken 4 harmonische Strahlen.

Man denke sich in jedem der Punkte h und d den zu hd zugeordneten 4ten harmonischen Strahl bestimmt. Diese beiden Strahlen müssen die Gerade ac in dem zu n zugeordneten harmonischen Punkte treffen (§ 12a), d. h. sie müssen sich auf der Geraden ac schneiden. Ebenso wird bewiesen, dass sich diese Strahlen auch auf der Geraden gb treffen, woraus folgt, dass sie die Verbindungslinie der Gegenpunkte h und d mit dem Schnittpunkte m sind.

γ) In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die übrigen Diagonalen harmonisch getheilt.

Beweise.

(Fig. 21.) na, nh, nd, no sind 4 harmonische Strahlen, weil a, p, d, o nach b) 4 harmonische Punkte sind (§ 12a). Ebenso wird die Behauptung für die andern Nebenecken bewiesen.

d) Aufgabe. Zu drei gegebenen Strahlen eines Punktes

(Fig. 22.) a, m, c, n sind 4 harmonische Punkte, weil da, dm, dc, dn nach β) 4 harmonische Strahlen sind (§ 12a). Ebenso wird die Behauptung für die andern Diagonalen bewiesen.

δ) Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten einer Ge-

den 4ten harmonischen Strahl mit dem Lineal allein zu finden. (Durch Anwendung von c .)	raden den 4ten harmonischen Punkt mit dem Lineal allein zu finden. (Durch Anwendung von γ .)
---	---

Uebungen.

§ 14.

1) Wenn man durch einen Eckpunkt eines Dreiecks die Mittellinie und die Parallele zu der gegenüberliegenden Seite zieht, so erhält man 4 harmonische Strahlen.

2) Wenn man vier harmonische Strahlen durch eine Gerade schneidet, welche mit einem derselben parallel ist, so halbirt der zugeordnete Strahl den zwischen den beiden übrigen Strahlen gelegenen Abschnitt.

3) Wenn man durch einen Eckpunkt eines Parallelogrammes die Diagonale und eine Parallele zu der zweiten Diagonalen zieht, so erhält man vier harmonische Strahlen.

4) Es sind drei Strahlen A, B, C gegeben. Man soll zu C den zugehörigen harmonischen Strahl suchen und dazu 3) benützen.

5) Wenn man die Höhen eines Dreiecks zieht und die Fusspunkte derselben durch gerade Linien verbindet, so hat man in jedem dieser Fusspunkte 4 harmonische Strahlen erhalten.

6) Den analogen Satz für die Mittellinien eines Dreiecks (welche sich in dem Schwerpunkte schneiden) auszusprechen und zu beweisen.

7) g, a, d, b seien vier harmonische Punkte. Auf welcher Linie liegen diejenigen Punkte c , welche die Eigenschaft haben, dass

$$\alpha) \angle acd = bcd$$

$$\beta) ca : cb = da : db$$

Antwort zu α) und β). Auf demjenigen Kreise K , welcher den Abstand gd zum Durchmesser hat. Man zeige auch, dass jeder Punkt von K die angegebenen Eigenschaften hat*).

8) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die beiden Abschnitte gegeben sind, in welche eine Kathete durch die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels getheilt wird.

9) Jede auf einem Durchmesser senkrechte Sehne wird durch die Katheten eines über demselben gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks harmonisch getheilt.

10) Diejenigen Geraden, welche die Nebenecken eines vollständigen Vierecks verbinden, bestimmen auf den Seiten desselben 6 Punkte, welche die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden.

11) Diejenigen Punkte, in welchen die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sich schneiden, liefern durch ihre Verbindung mit den Ecken des Vierseits 6 gerade Linien, welche Seiten eines vollständigen Vierecks sind.

12) Von einem vollständigen Viereck sind die Nebenecken und ein Eckpunkt gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

*) Vergl. I, § 70 a u. α .

13) Von einem vollständigen Vierseit sind die Diagonalen und eine Seite gegeben. Man soll dasselbe zeichnen.

14) Von vier harmonischen Strahlen ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Strahlen durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gehen sollen. Man soll die drei fehlenden Strahlen zeichnen.

15) Von vier harmonischen Punkten ist der eine gegeben, sowie die Bedingung, dass die übrigen Punkte auf drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden liegen sollen. Man soll die fehlenden Punkte bestimmen.

16) Auf dem Felde sind zwei Punkte a und b durch Visirstäbe bezeichnet. Obgleich man eines Hindernisses wegen nicht längs der Linie ab visiren kann, so soll dennoch mit alleiniger Hülfe von Visirstäben der Schnittpunkt der Geraden ab mit einer andern ausgesteckten Geraden G bestimmt werden.

Andeutung. Man stecke ein vollständiges Vierseit ab , von welchem a und b zwei Gegenpunkte sind, während ein zweites Paar von Gegenpunkten beliebig auf G angenommen wird. Nach § 13 γ wird nun die Aufgabe durch das Aufsuchen eines vierten harmonischen Punktes auf der dritten Diagonalen des Vierseits zu lösen sein.

17) Von einem gegebenen Punkte m aus eine Gerade nach dem unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebener Geraden zu ziehen.

II. Abschnitt.

Projectivische Grundgebilde.

§ 15. Punktreihen und Strahlenbüschel.

a) Erklärung. Es gibt unendlich viele Punkte, welche auf einer Geraden G liegen. Die Gesammtheit derselben wird eine Punktreihe genannt. Die Gerade G heisst der Träger der Punktreihe.

α) Erklärung. Es gibt unendlich viele Geraden, welche durch einen Punkt m gehen. Die Gesammtheit derselben wird ein Strahlenbüschel genannt. Der Punkt m heisst der Scheitel des Strahlenbüschels.

Die Punktreihe und der Strahlenbüschel heissen die Grundgebilde der neueren Geometrie, weil man sich derselben zu der Erzeugung oder der Definition von zusammengesetzteren Figuren bedient.

Die Punkte der Punktreihe oder die Strahlen des Strahlenbüschels werden als Elemente dieser Gebilde bezeichnet.

Um aus zwei Grundgebilden neue Figuren entstehen zu lassen, ist es nöthig, dieselben so auf einander zu beziehen, dass jedem

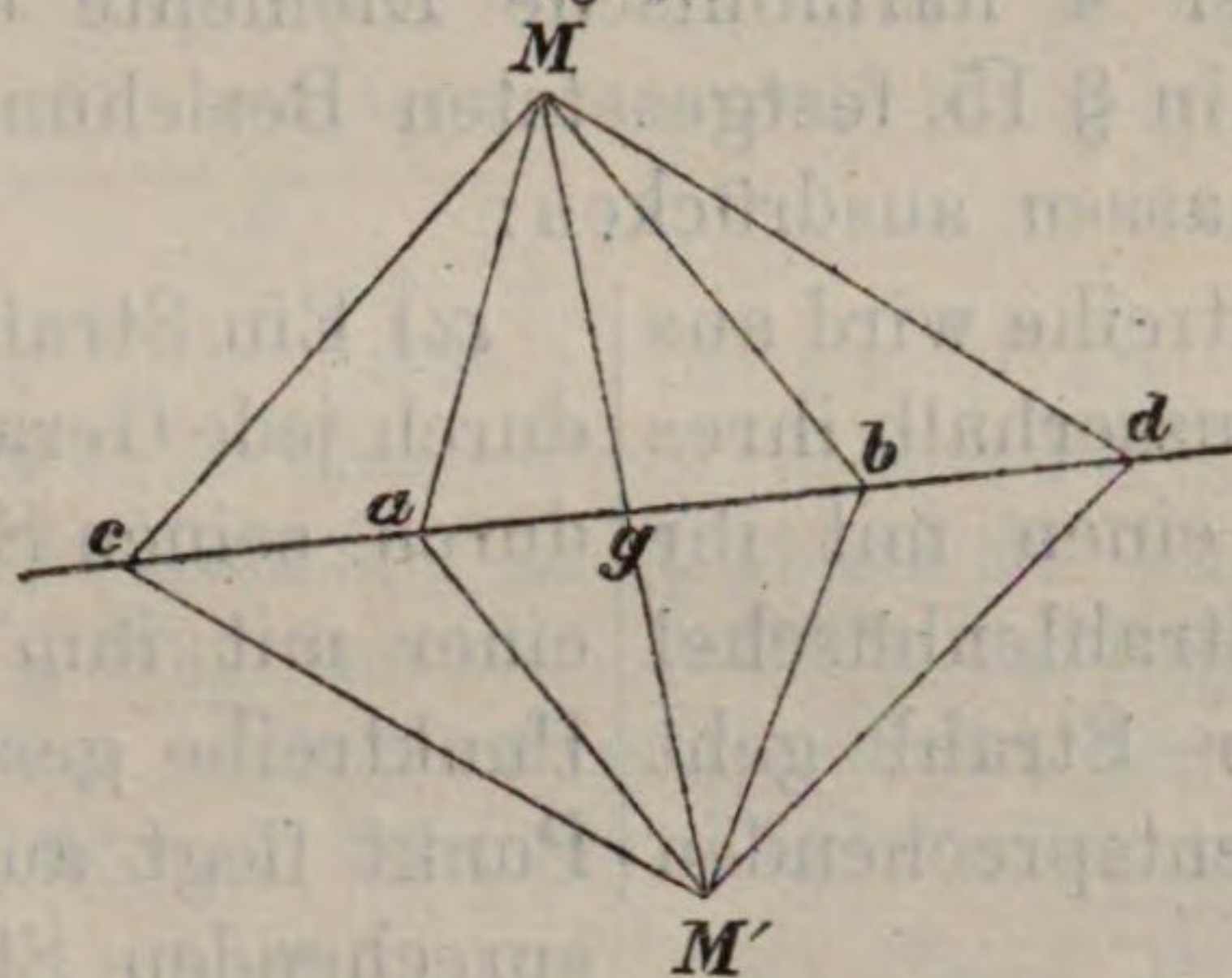
Elemente des einen Grundgebildes ein einziges Element des andern entspricht.

Solche „eindeutige Beziehungen“ von Grundgebilden auf einander können in folgender Art aufgestellt werden.

b) Man verbinde die Punkte $a, b, c, d \dots$ einer Punktreihe (Fig. 23) mit einem ausserhalb des Trägers gelegenen Punkte

β) Man schneide die Strahlen eines Strahlenbüschels durch eine Gerade, welche nicht durch den Scheitel geht

Fig. 23.



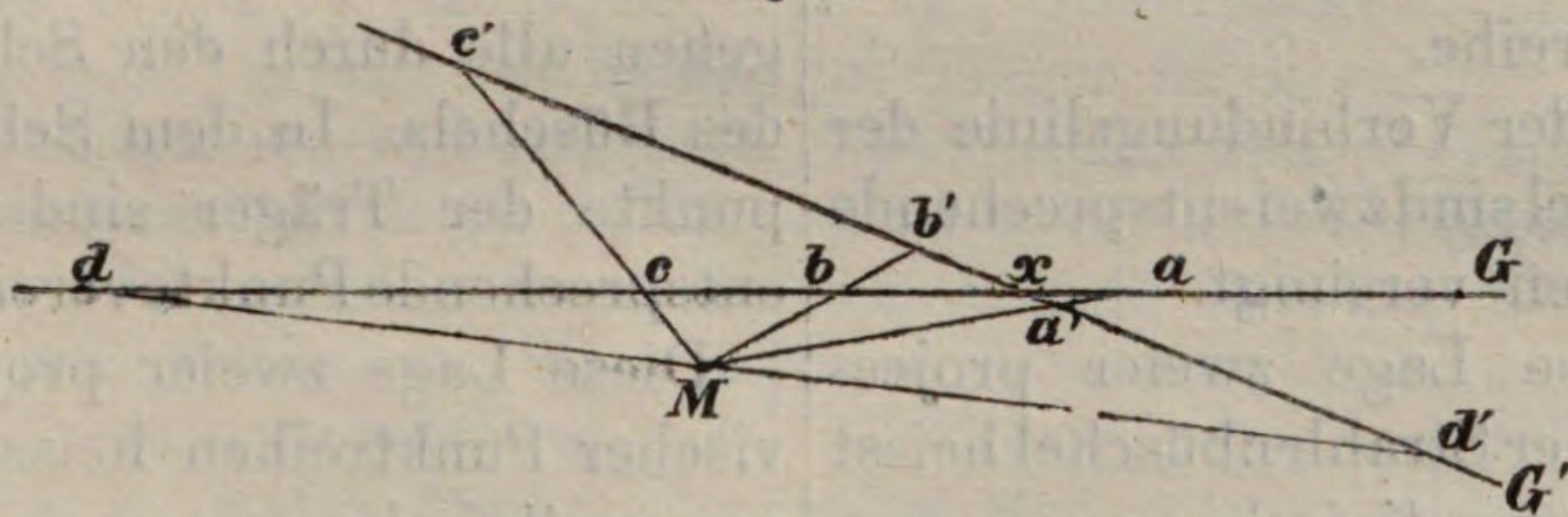
M und setze jeden Punkt der Reihe dem durch ihn gezogenen Strahle des entstandenen Strahlenbüschels $M(a, b, c, d \dots)$ entsprechend.

und setze jeden Strahl des Büschels dem auf ihm gelegenen Punkte der entstandenen Punktreihe entsprechend.

c) Man verbinde jeden Punkt $a, b, c, d \dots$ (Fig. 23) einer Punktreihe mit zwei ausserhalb

γ) Man schneide die Strahlen eines Strahlenbüschels (Fig. 24) mit zwei Geraden

Fig. 24.



des Trägers gelegenen Punkten M und M' und setze in den entstandenen Strahlenbüscheln je zwei Strahlen entsprechend, welche sich in einem Punkte der Punktreihe schneiden.

G und G' , welche nicht durch den Scheitel gehen und setze in den entstandenen Punktreihen je zwei Punkte entsprechend, welche auf demselben Strahle des Büschels liegen.

In allen diesen Fällen entsprechen 4 harmonischen Elementen des einen Gebildes wieder 4 harmonische Elemente des andern, wie sich leicht durch § 12, a und α beweisen lässt.

§ 16. Projectivische Grundgebilde.

Zwei Grundgebilde heissen zu einander projectivisch verwandt, oder kurz projectivisch, wenn sie eindeutig so auf einander bezogen sind, dass je 4 harmonischen Elementen des einen wieder 4 harmonische Elemente des andern entsprechen. Die in § 15. festgesetzten Beziehungen lassen sich also folgendermassen ausdrücken:

a) Eine Punktreihe wird aus jedem Punkte ausserhalb ihres Trägers durch einen mit ihr projectivischen Strahlenbüschel projecirt. Jeder Strahl geht durch den ihm entsprechenden Punkt.

α) Ein Strahlenbüschel wird durch jede Gerade, welche nicht durch seinen Scheitel geht, in einer mit ihm projectivischen Punktreihe geschnitten. Jeder Punkt liegt auf dem ihm entsprechenden Strahle.

Diese Lage der beiden Gebilde gegen einander heisst die perspectivische Lage.

b) Eine Punktreihe wird aus zwei nicht auf ihrem Träger gelegenen Punkten durch zwei projectivische Strahlenbüschel projecirt. Je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich auf dem Träger der Punktreihe.

β) Ein Strahlenbüschel wird durch zwei Gerade, welche nicht durch den Scheitel gehen, in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte (Projectionsstrahlen) gehen alle durch den Scheitel des Büschels. In dem Schnittpunkte der Träger sind zwei entsprechende Punkte vereinigt.

In der Verbindungslinie der Scheitelsindzweientsprechende Strahlen vereinigt.

Diese Lage zweier projectivischer Strahlenbüschel heisst die perspectivische.

Diese Lage zweier projectivischer Punktreihen heisst die perspectivische.

§ 17. Aufgaben.

a) Eine Punktreihe und einen Strahlenbüschel projectivisch auf einander zu beziehen, so dass drei gegebene Punkte a, b, c (Fig. 25) der Punktreihe den gegebenen Strahlen α, β, γ (Fig. 26) des Büschels entsprechen.

Auflösung. Man denke sich den Strahlenbüschel so verschoben, dass die Strahlen α , β , γ bezüglich durch die Punkte a , b , c gehen. Die neue Lage des Büschels findet man dadurch, dass man durch a und b einen Kreis zieht, welcher über ab als

Fig. 25.

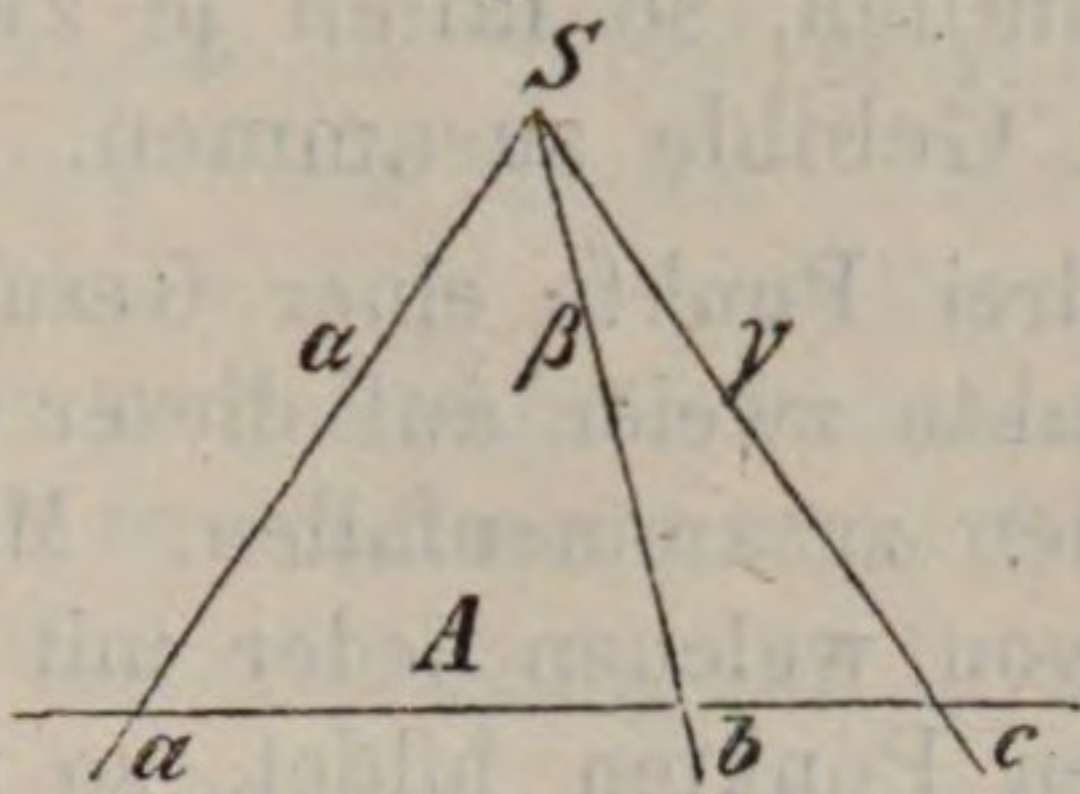
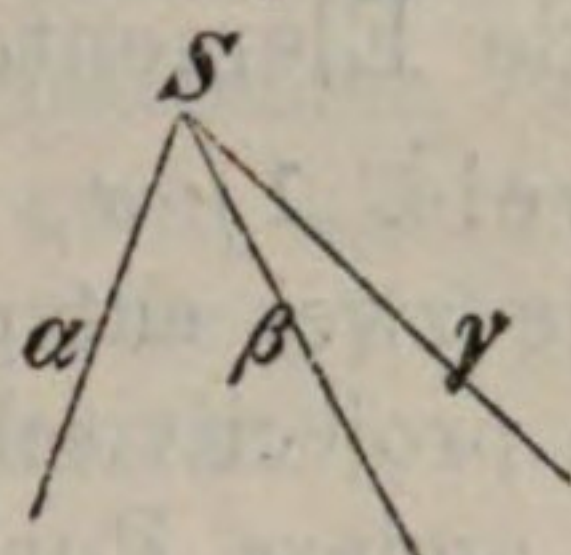


Fig. 26.



Sehne den Winkel der Strahlen α und β als Peripheriewinkel fasst, und durch b und c einen Kreis, dessen Peripheriewinkel über bc dem Winkel der Strahlen β und γ gleich ist. Die beiden Kreise schneiden sich in b und zum zweiten Male in dem gesuchten Orte des Scheitels S . Nun setze man jeden Strahl des Büschels seinem Schnittpunkt mit dem Träger der Punktreihe entsprechend.

b) Zwei Strahlenbüschel projectivisch so auf einander zu beziehen, dass drei gegebenen Strahlen des einen der Reihe nach drei gegebene Strahlen des andern entsprechen.

β) Zwei Punktreihen projectivisch so auf einander zu beziehen, dass drei gegebenen Punkten der einen der Reihe nach drei gegebene Punkte der andern entsprechen.

Auflösung.

Man lege die Strahlenbüschel so, dass zwei entsprechende Strahlen in die Verbindungslinie MM' (Fig. 23) der Scheitel fallen.

Die beiden andern Paare entsprechender Strahlen bestimmen zwei Schnittpunkte a und b . Man setze nun je zwei Strahlen beider Büschel entsprechend, welche sich in einem Punkte der Geraden ab schneiden.

Man lege die Punktreihen so, dass zwei entsprechende Punkte in den Schnittpunkt x (Fig. 24) der Träger fallen.

Die beiden andern Paare entsprechender Punkte bestimmen zwei Gerade aa' und bb' und ihren Schnittpunkt M .

Man setze nun je zwei Punkte beider Reihen entsprechend, welche auf einer durch M gehenden Geraden liegen.

Allgemeine Sätze über projectivische Gebilde.

§ 18.

a) Wenn zwei Grundgebilde mit demselben dritten projectivisch sind, so sind sie auch unter sich projectivisch.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition der projectivischen Gebilde.

b) Wenn drei Elemente eines Grundgebildes mit den entsprechenden Elementen eines damit projectivischen gleichartigen Grundgebildes zusammenfallen, so fallen je zwei entsprechende Elemente der beiden Gebilde zusammen.

Beweis. 1) a, b, c seien drei Punkte einer Geraden, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier auf dieser Geraden gelegenen projectivischen Punktreihen zusammenfallen. Man kann nun drei andere Punkte finden, von welchen jeder mit a, b, c eine Gruppe von vier harmonischen Punkten bildet, so nämlich, dass nach einander jeder der Punkte a, b, c einem der drei neuen Punkte zugeordnet ist. Diese drei gefundenen Punkte müssen nach der Definition projectivischer Gebilde (§ 16.) mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen. Aus den nunmehr vorhandenen 6 Punkten kann man wieder andere Gruppen von drei Punkten bilden, von welchen jede auf dieselbe Weise zu drei Punkten führt, welche ebenfalls mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen.

In derselben Weise fortschliessend findet man, dass auf der gegebenen Geraden eine unendliche Zahl von Punkten existiren müsse, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen. Es bleibt nur noch zu beweisen, dass die sich selbst entsprechenden Punkte der Geraden in stetiger Weise der ganzen Ausdehnung der Geraden nach auf einander folgen.

Seien m und n zwei sich selbst entsprechende Punkte der Geraden. Zu jedem Punkt innerhalb der Strecke mn , welcher mit seinem entsprechenden zusammenfällt, existirt ein zugehöriger vierter harmonischer Punkt ausserhalb mn , welcher ebenfalls sich selbst entspricht. Umgekehrt gehört zu jedem sich selbst entsprechenden Punkt ausserhalb mn ein eben solcher innerhalb dieser Strecke, nämlich der zugehörige vierte harmonische Punkt. Enthielte nun eine Strecke, wie klein dieselbe auch sein mag, keine sich selbst entsprechenden Punkte, so könnten auch keine solche ausserhalb mn liegen, was nicht möglich ist, da dem Vorigen zufolge unendlich viele Punkte der Geraden mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Wenn aber keine noch so kleine Strecke, welche zwischen zwei sich selbst entsprechenden Punkten liegt, von weiteren Punkten dieser Art frei sein kann, so müssen diese Punkte in stetiger Weise auf einander folgen, was zu beweisen war.

2) Es seien zwei projectivische und concentrische Strahlbüschel gegeben, in welchen drei Strahlen A, B, C sich selbst

entsprechen. Die beiden Strahlbüschel projeciren sich auf einer Geraden G , welche nicht durch ihren Scheitel geht, in zwei projectivischen Punktreihen. Die Schnittpunkte a, b, c der Strahlen A, B, C mit der Geraden G entsprechen in diesen Punktreihen sich selbst. Wenn nun in den gegebenen Strahlenbüscheln nicht alle Strahlen mit ihren entsprechenden Strahlen zusammenfielen, so könnten auch in den projectivischen Punktreihen, in welchen die Punkte a, b, c sich selbst entsprechen, nicht alle Punkte mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Dies widerspricht aber dem unter 1) bewiesenen ersten Theile des Lehrsatzes.

c) Zwei Grundgebilde können auf eine einzige Art projectivisch so auf einander bezogen werden, dass drei Elementen a, b, c des einen der Reihe nach drei Elemente a', b', c' des andern entsprechen.

Beweis. Im andern Falle würden zwei projectivische Gebilde entstehen, welche drei Elemente a', b', c' entsprechend gemein haben, ohne dass jedes Element mit seinem entsprechenden zusammenfällt, was nach b) unmöglich ist.

Anmerkung. Die Art, in welcher diese einzig mögliche Beziehung bewerkstelligt wird, ist in § 17, a, b, und β auseinandergesetzt.

Bedingungen für die perspectivische Lage der Grund- § 19.
gebilde.

a) Eine Punktreihe und ein mit ihr projectivischer Strahlenbüschel liegen perspectivisch, wenn drei Punkte der ersteren auf den entsprechenden Strahlen des letzteren liegen.

b) Zwei projectivische Strahlenbüschel liegen perspectivisch, wenn drei Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen.	β) Zwei projectivische Punktreihen liegen perspectivisch, wenn drei Projectionsstrahlen durch einen Punkt gehen.
---	---

Die Beweise von a), b), β) folgen unmittelbar aus § 17. mit Anwendung von § 18c.

Von dem Sinne der Grundgebilde.

§ 20.

a) Wenn zwei bewegte Punkte gleichzeitig die Orte entsprechender Punkte in zwei projectivischen Punktreihen durchlaufen, so behält der eine	α) Wenn zwei bewegte Strahlen gleichzeitig die Lagen entsprechender Strahlen in zwei projectivischen Strahlenbüscheln durchlaufen, so behält
---	--

dieser Punkte die eingeschlagene Bewegungsrichtung bei, so lange dies der andere thut.

Man beweist diese Behauptung, indem man die beiden Reihen in perspectivische Lage bringt und beachtet, dass die bewegten Strahlen jederzeit die Durchschnittspunkte beider Träger mit einem um das Projectionscentrum sich drehenden Strahle sind. Die beiden Punkte können also ihre Bewegungsrichtung nur gleichzeitig ändern, wenn der sich drehende Strahl den Sinn seiner Drehung wechselt.

b) Wenn zwei bewegte Punkte in projectivischen Punktreihen auf zusammenfallenden oder parallelen Trägern gleichzeitig die Orte entsprechender Punkte durchlaufen, so sind die Richtungen, nach welchen sich die beiden Punkte bewegen, entweder jederzeit übereinstimmend oder jederzeit entgegengesetzt (α). Im ersten Falle heissen die Punktreihen gleichlaufend, im zweiten ungleichlaufend.

der eine Strahl den Sinn seiner Drehung bei, so lange dies der andere thut.

Man beweist diese Behauptung, indem man die beiden Büschel in perspectivische Lage bringt und beachtet, dass die bewegten Strahlen jederzeit die Projectionsstrahlen eines auf dem perspectivischen Durchschnitt sich bewegenden Punktes sind. Die beiden Strahlen können also nur gleichzeitig den Sinn ihrer Drehung ändern, wenn der sich bewegende Punkt seine Bewegungsrichtung ändert.

β) Wenn zwei bewegte Strahlen in projectivischen Strahlenbüscheln gleichzeitig die Orte entsprechender Strahlen durchlaufen, so sind die Drehungsrichtungen, nach welchen sich die beiden Strahlen bewegen, entweder jederzeit übereinstimmend oder jederzeit entgegengesetzt (α). Im ersten Falle heissen die Strahlenbüschel gleichlaufend, im zweiten Falle ungleichlaufend.

§ 21. Der Kreis und die projectivischen Grundgebilde.

a) Die Punkte eines Kreises werden aus zwei beliebigen unter ihnen durch zwei congruente und gleichlaufende Strahlenbüschel projectirt.

α) Die Tangenten eines Kreises schneiden zwei beliebige derselben in zwei projectivischen Punktreihen.

Beweis. *a)* Wenn A und C zwei beliebige Punkte des Kreises sind, so sind die Winkel AsC und $As'C$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen entweder gleich (wie in der Figur) oder der eine ist dem Nebenwinkel des andern gleich (wenn die Punkte

A und C durch die Punkte s und s' getrennt sind). In jedem Falle bilden die Strahlen sa und sc des Büschels s einerseits und die Strahlen $s'a'$ und $s'c'$ des Büschels s' andererseits gleiche Winkel von gleichem Sinne, worin der Beweis gelegen ist.

Fig. 27.

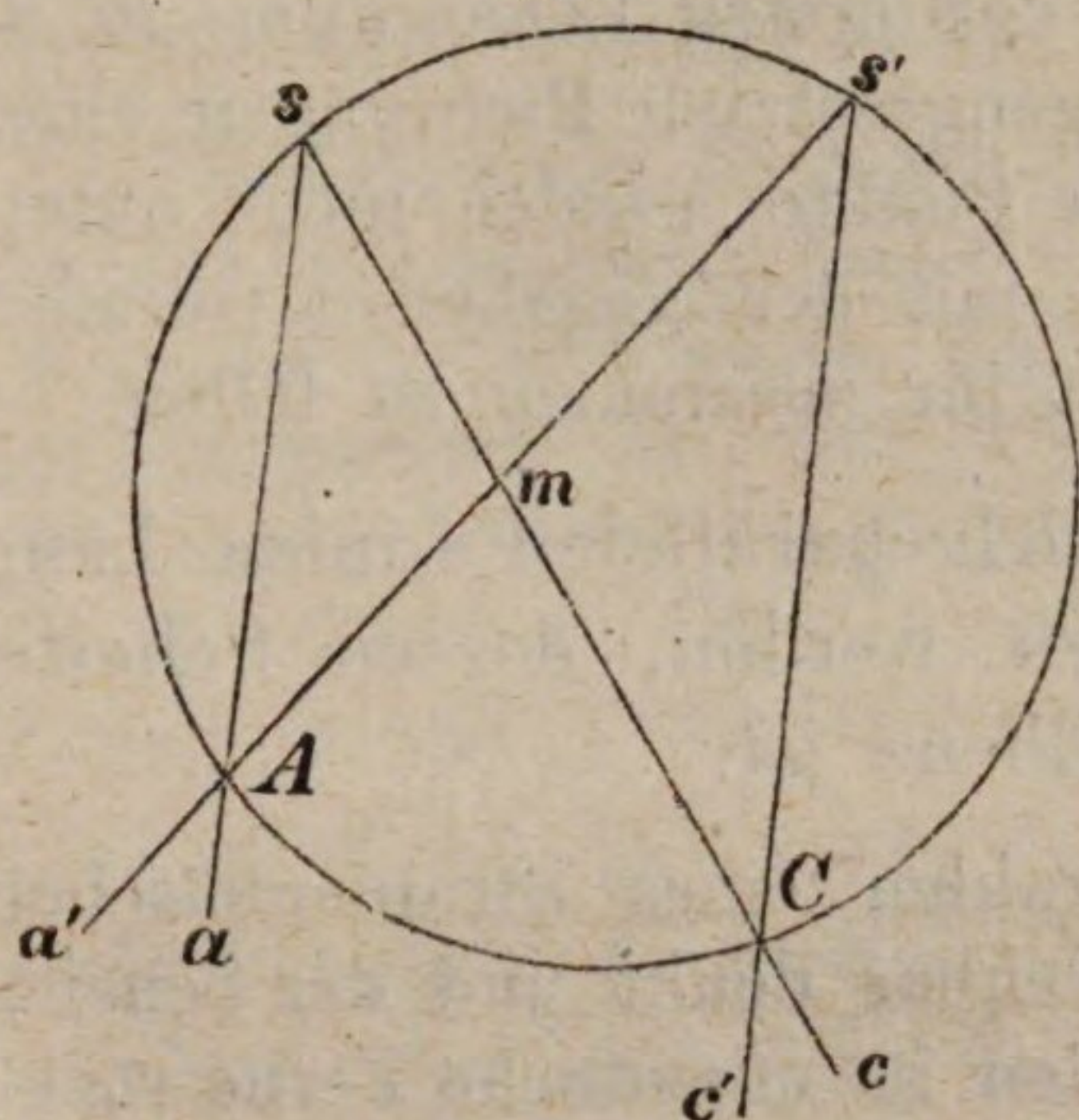
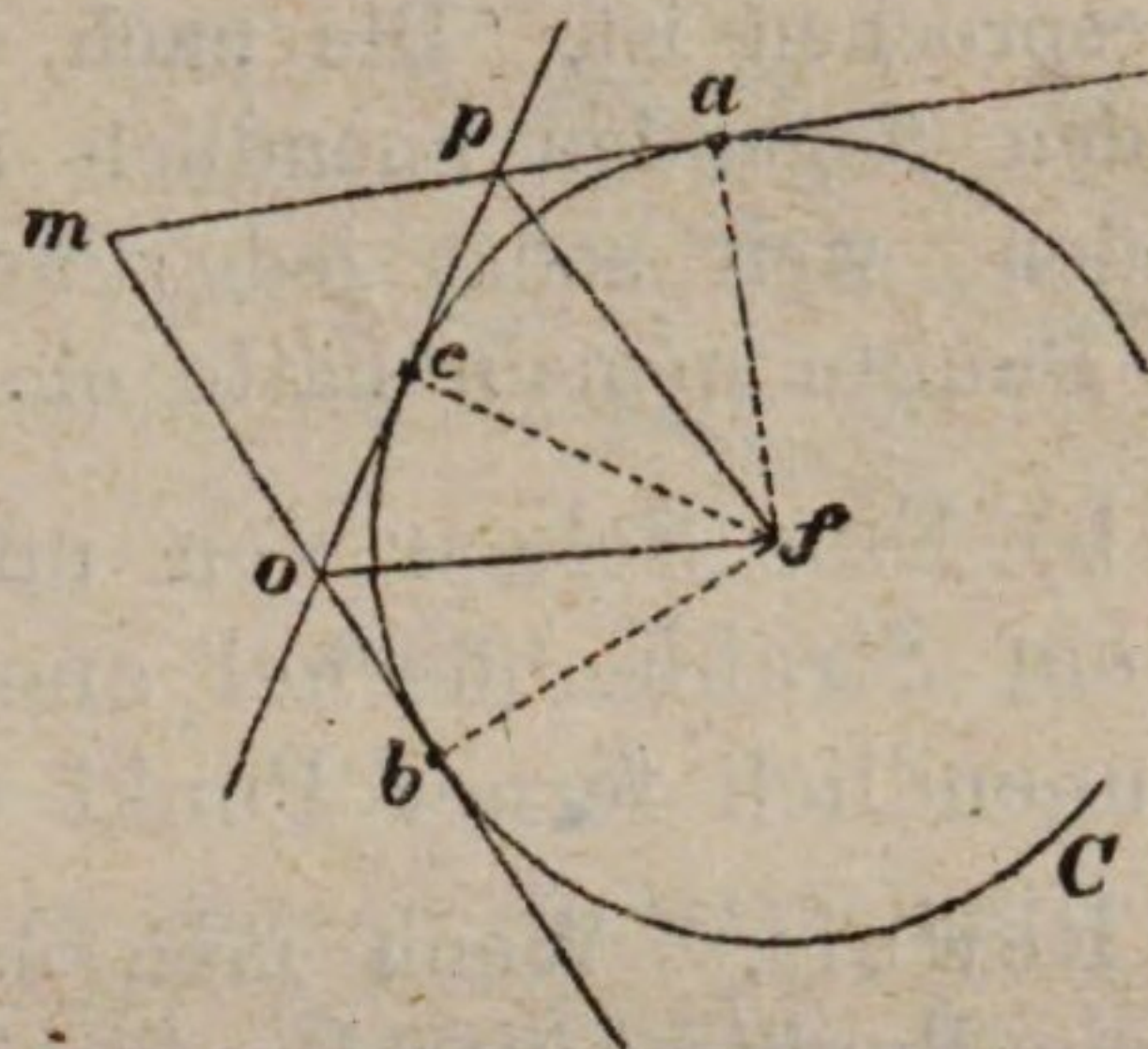


Fig. 28.



a) Wenn die Tangenten ma und mb an die Punkte a und b des Kreises C von einer dritten Tangente an den Punkt c in o und p geschnitten werden, so ist leicht zu zeigen, dass der Winkel pfo entweder gleich der Hälfte des concaven Winkels afb (wie in der Figur) oder gleich $180^\circ - \frac{afb}{2}$ ist (wenn die Punkte m und c auf verschiedenen Seiten der Sehne ab liegen). Wenn also c sich auf dem Kreise bewegt, so bleibt der von den Strahlen pf und fo eingeschlossene Winkel gleich, d. h. diese Strahlen beschreiben zwei congruente Strahlenbüschel und folglich (§ 16a) die Punkte p und o projectivische Punktreihen.

Anmerkung. Der Satz a) kann auch umgekehrt werden: Entsprechende Strahlen zweier congruenter und gleichlaufender Strahlenbüschel schneiden sich auf einem Kreise, welcher durch die Scheitel der Büschel geht.

III. Abschnitt.

Projectivische Grundgebilde. (Fortsetzung.)

Unendlich ferne Punkte.

§ 22.

a) Parallele Geraden können als Linien angesehen werden, welche einen unendlich fernen Punkt mit einander gemein haben und umgekehrt.

Eine Gerade hat nur einen einzigen unendlich fernen Punkt.

Beweis. Wenn man die eine von zwei convergenten Geraden festhält und die andere um einen ihrer Punkte m dreht, so tritt der Parallelismus ein, wenn der Schnittpunkt der Geraden nach der einen oder andern Seite in unendliche Ferne gerückt ist und die letztern beiden Lagen sind von der parallelen Lage unendlich wenig verschieden, womit der Sinn der ersten Behauptung in a) ausgesprochen ist. Die nach entgegengesetzten Richtungen einer Geraden liegenden unendlich fernen Punkte werden nicht unterschieden, weil sonst jede Parallele mit der gegebenen Geraden zwei Punkte gemein hätte ohne mit ihr zusammen zu fallen.

b) Eine Schaar von unter sich parallelen Linien kann als ein Strahlenbüschel angesehen werden, dessen Scheitel ein unendlich ferner Punkt der Ebene ist.

Beweis. Wenn man die Strahlen eines Strahlenbüschels um die Punkte einer Punktreihe drehbar denkt und der Scheitel des Büschels auf einem seiner Strahlen in unendliche Ferne rückt, so werden die Strahlen des Büschels sich der parallelen Lage unbegrenzt nähern.

c) Wenn man in zwei Strahlenbüscheln, deren Scheitel nicht zusammenfallen, die parallelen Strahlen entsprechend setzt, so sind die Strahlenbüschel congruent und können als projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage betrachtet werden, deren perspectivischer Durchschnitt eine unendlich ferne Gerade ist.

Beweis. Die Congruenz der Strahlenbüschel erweist sich durch die Gleichheit entsprechender Winkel. Was die zweite Behauptung betrifft, so denke man sich die Strahlen zweier perspectivisch gelegener Strahlenbüschel um ihre Scheitel drehbar, während der perspectivische Durchschnitt sich parallel mit seiner ersten Lage entfernt. Wenn die Entfernung des perspectivischen Durchschnitts von den Scheiteln der Büschel bis ins Unbegrenzte wächst, so gehen die entsprechenden Strahlen der Büschel in die parallele Lage über, worin der Beweis gelegen ist.

d) Die unendlich fernen Punkte einer Ebene können als Punkte einer Geraden angesehen werden.

Beweis. Da in den beiden congruenten Strahlenbüscheln, welche in c) besprochen sind, parallele Strahlen von allen möglichen Richtungen vorhanden sind, so enthält der perspectivische Durchschnitt derselben auch alle unendlich fernen Punkte der Ebene.

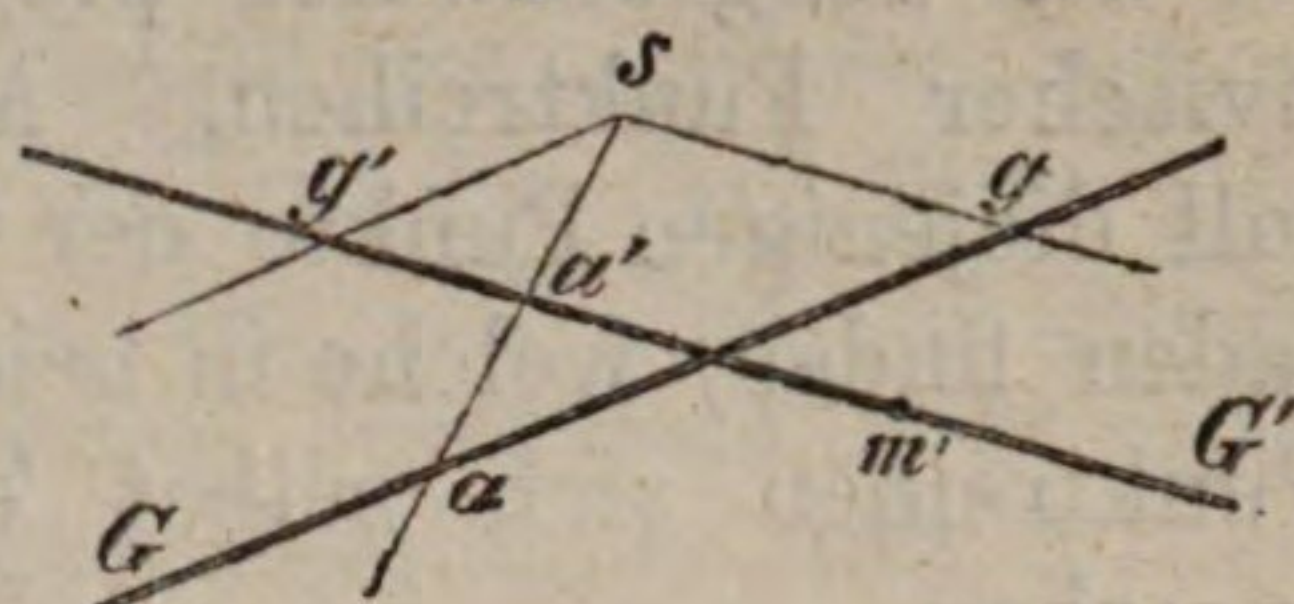
Die Gegenpunkte projectivischer Punktreihen.

§ 23.

a) Aufgabe. Es seien zwei projectivische Punktreihen G und G' gegeben. Man soll in jeder Reihe denjenigen Punkt suchen, welcher dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe entspricht.

Auflösung. Man bringe die Reihen in perspectivische Lage (Fig. 29). Zwei durch das Projectionscentrum zu den Trägern gezogene Parallelen bestimmen auf diesen Trägern die gesuchten Punkte g und g' der Reihen.

Fig. 29.



b) Erklärung. In jeder von zwei projectivischen Punktreihen heisst derjenige Punkt der Gegenpunkt der Reihe, welcher dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe entspricht.

Anmerkung. Wenn die unendlich fernen Punkte sich selbst entsprechen, so fallen diese Gegenpunkte mit den unendlich fernen Punkten zusammen, von welchem Falle der folgende Paragraph handelt.

Aehnliche Punktreihen.

§ 24.

Erklärung. Zwei Punktreihen heissen ähnlich, wenn ihre Punkte sich paarweise so entsprechen, dass zwei Strecken der einen Reihe sich wie die entsprechenden Strecken der andern verhalten.

a) Aehnliche Punktreihen sind projectivisch. Die unendlich fernen Punkte der Träger entsprechen sich in beiden Reihen.	α) Projectivische Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte sich entsprechen, sind ähnlich.
---	--

Beweis. a). Wenn man die Träger ähnlicher Punktreihen in parallele Lage bringt, so gehen die Projectionsstrahlen durch einen Punkt (Einleitung § 3 β), worin der Beweis gelegen ist (§ 15 β).

α). Wenn man die Träger beider Punktreihen in parallele Lage bringt, so liegen die Punktreihen perspectivisch (§ 19 β), das heisst, die Projectionsstrahlen gehen durch einen Punkt, woraus die Behauptung folgt (Einleitung § 3b).

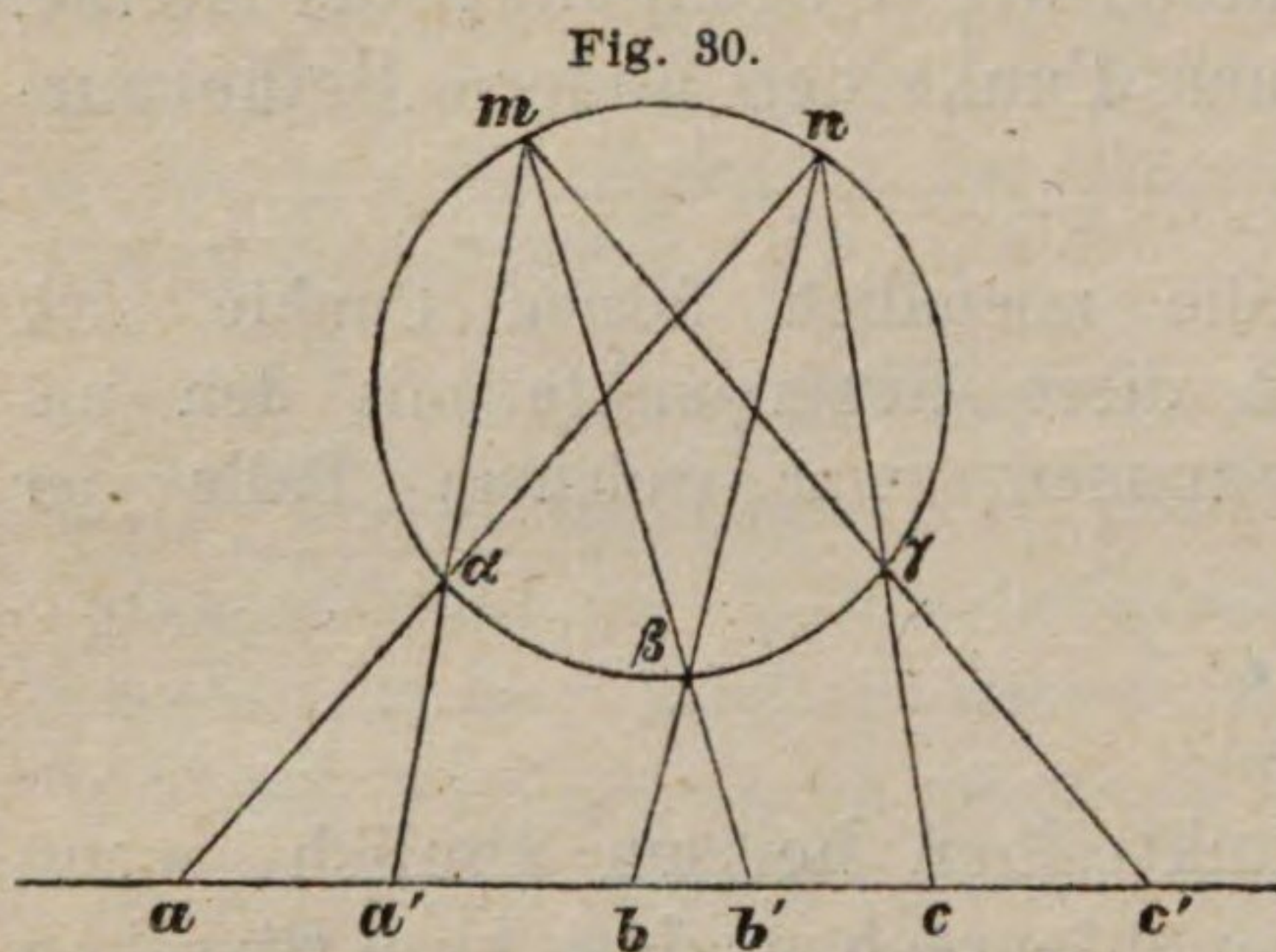
Anmerkung. Da in ähnlichen Punktreihen die unendlich fernen Punkte sich entsprechen, so sind diese Reihen durch zwei weitere Paare entsprechender Punkte bestimmt (§ 18c).

§ 25. Aufgaben.

a) Aufgabe. Eine Gerade sei der Träger zweier projectivischer Punktreihen. Man soll diejenigen Punkte der Geraden finden, welche in beiden Punktreihen sich selbst entsprechen.

α) Aufgabe. Ein Punkt sei der Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel. Man soll diejenigen Strahlen des Punktes finden, welche in beiden Büscheln sich selbst entsprechen.

Auflösung a) Man projicire die eine Punktreihe $a, b, c \dots$ aus einem beliebigen Punkte m durch einen Strahlenbüschel.



Einen andern Strahlenbüschel, der mit diesem congruent und gleichlaufend ist, bringe man mit der andern Punktreihe $a', b', c' \dots$ in perspectivische Lage (siehe die Auflösung von § 17a). Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser Büschel liegen auf einem Kreise (§ 21 Anmerkung). Wenn dieser Kreis den Träger

der Punktreihen in zwei Punkten schneidet, so sind dieselben sich selbst entsprechende Punkte der beiden Reihen.

Da die congruenten Strahlenbüschel der Construction zufolge gleichlaufend sind, so müssen die Scheitel m und n der Büschel auf die gleiche Seite (Fig. 30) oder auf verschiedene Seiten des Trägers fallen, je nachdem die beiden Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind. In dem zweiten Falle schneidet der Kreis die Gerade A nothwendig in zwei Punkten. In dem ersten Falle kann der Kreis die Gerade ebenfalls in zwei Punkten schneiden oder berühren oder gar nicht treffen, wie in der Figur.

α) Die gegebenen projectivischen Strahlenbüschel projiciren sich auf einer Geraden, welche nicht durch ihren gemeinsamen Scheitel geht, als zwei projectivische Punktreihen. Diejenigen Punkte der Geraden, welche sich in beiden Reihen selbst entsprechen (a), werden aus dem gemeinsamen Scheitel der Strahlenbüschel durch die gesuchten Strahlen projicirt.

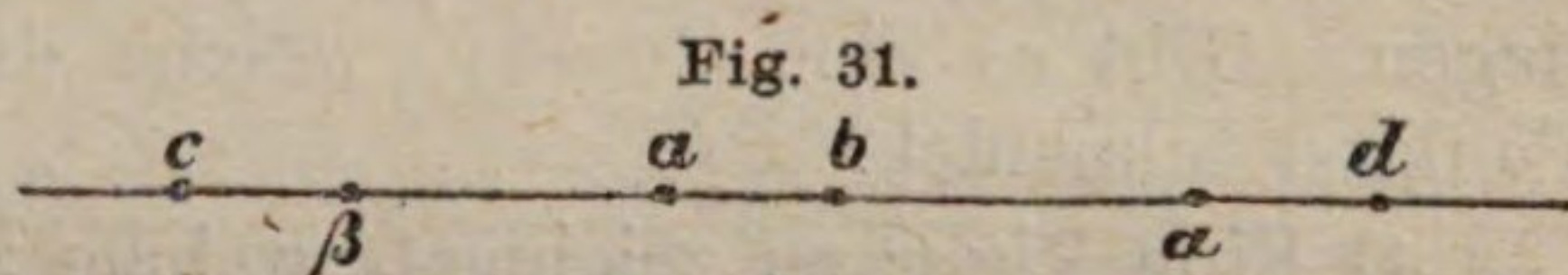
b) Aufgabe. Es sind zwei projectivische Strahlenbüschel gegeben. Man soll zwei zu einander senkrechte Strahlen des einen Büschels finden, welchen wiederum zwei zu einander senkrechte Strahlen des andern entsprechen.

Auflösung. Man bringe die beiden Büschel in perspectivische Lage. Wenn der perspectivische Durchschnitt auf der Verbindungslinie der beiden Scheitel senkrecht steht, so stellt die letztere Gerade einen gemeinsamen Schenkel der sich entsprechenden rechten Winkel dar. Die beiden andern Schenkel laufen mit dem perspectivischen Durchschnitt parallel. In jedem andern Falle halbiere man den Abstand der Scheitel durch eine Senkrechte. Dieselbe trifft den perspectivischen Durchschnitt in dem Mittelpunkte eines Kreises, welcher durch die beiden Scheitel geht und den perspectivischen Durchschnitt in zwei Punkten trifft. Diese Punkte werden aus jedem der Scheitel durch einen rechten Winkel projicirt und die Schenkel des einen dieser Winkel entsprechen den Schenkeln des andern.

Es geht hieraus zugleich hervor, dass kein anderes Paar entsprechender rechter Winkel existirt, wenn die Strahlenbüschel nicht congruent sind.

c) Aufgabe. Man soll einen Punkt finden, aus welchem zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers durch congruente Strahlenbüschel projicirt werden.

Auflösung. (Fig 31.) Der Punkt c in der ersten Reihe entspreche dem Punkte a der zweiten; der Punkt a in der ersten Reihe entspreche dem Punkte b der zweiten und der Punkt b in der ersten Reihe entspreche dem Punkte d der zweiten. Man suche zu c, a, b den vierten harmonischen Punkt α , welcher a zugeordnet ist und zu a, b, d den vierten harmonischen Punkt β , welcher b zugeordnet ist. Wenn die über den Strecken $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmessern gezeichneten Kreise sich in zwei Punkten m und n schneiden, so hat jeder dieser Punkte die Eigenschaft, dass von ihm aus die Strecken ca, ab, bd unter gleichen Winkeln gesehen werden (I, § 70b*). Jeder der Punkte m und n genügt nun der Aufgabe, denn die Figur der 3 Strahlen mc, ma, mb des einen Büschels ist der Figur der entsprechenden Strahlen ma, mb, md des andern Büschels congruent und durch diese 3 Paare entsprechender



*) Man kann dies auch leicht durch II, § 13, 7 beweisen.

Strahlen sind die beiden projectivischen Strahlenbüschel als congruent bestimmt. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Punkte m und n immer existiren, wenn die gegebenen Punktreihen gleichlaufend sind und keine sich selbst entsprechenden Punkte enthalten. In diesem Falle denke man sich a und b in Fig. 31 als diejenigen entsprechenden Punkte beider Reihen, welche einander am nächsten liegen. Die Strecken ac und bd müssen den gemachten Voraussetzungen zufolge entgegengesetzte Richtung haben und die Strecke ab an Grösse übertreffen. Man folgert alsdann nach § 12c, dass α und β auf verschiedenen Seiten der Strecke ab liegen und die beiden Kreise sich schneiden müssen.

§ 26.

Uebungen.

1) Zwei projectivische Punktreihen in perspectivischer Lage werden aus einem Punkte m durch zwei projectivische Strahlenbüschel S und S' projecirt. Man soll zwei sich selbst entsprechende Strahlen von S und S' angeben.

Andeutung. Die Verbindungslinien von m mit dem Schnittpunkt der Träger und dem Projectionscentrum.

2) Zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage werden durch eine Gerade geschnitten. Man soll in den projectivischen Punktreihen, welche auf dieser Geraden entstehen, zwei sich selbst entsprechende Punkte angeben.

Andeutung. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem perspectivischen Durchschnitt und der Verbindungslinie beider Scheitel.

3) Eine Figur zu zeichnen, welche zwei Punktreihen darstellt, die nicht unter sich, aber mit derselben dritten Punktreihe perspectivisch liegen. Gibt es eine Gerade, welche die 3 Träger in entsprechenden Punkten schneidet?

4) Eine Figur zu zeichnen, welche zwei Strahlenbüschel darstellt, die nicht unter sich aber mit demselben dritten Strahlenbüschel perspectivisch sind. Gibt es einen Punkt, in welchem sich 3 entsprechende Strahlen schneiden?

5) Auf zwei convergenten Geraden seien zwei perspectivische Punktreihen durch zwei Projectionsstrahlen bestimmt. Man soll α) zu einem Punkte m der einen Reihe den entsprechenden finden, β) diejenigen Punkte bestimmen, welche durch Drehung der Träger um ihren Schnittpunkt zum Zusammenfallen gebracht werden können. (Bei β) ist der Gebrauch des Zirkels erlaubt.)

6) Zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers sind durch einen sich selbst entsprechenden Punkt und zwei Paare a, a' und b, b' entsprechender Punkte bestimmt. Man soll α) zu einem Punkte c der einen Reihe den entsprechenden finden, β) den zweiten sich selbst entsprechenden Punkt bestimmen.

Die Auflösung geschieht durch 2) oder 3) mit dem Lineale allein.

7) Die entsprechende Aufgabe für zwei concentrische Strahlenbüschel zu stellen und durch 1) oder 4) zu lösen.

8) Zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers sind durch die sich selbst entsprechenden Punkte m und n und ein Paar $a a'$ entsprechender Punkte bestimmt. Man soll mit Hülfe von 2) oder 3) zu einem Punkte b der einen Reihe den entsprechenden finden.

9) Die dualistisch entsprechende Aufgabe zu stellen und durch 1) oder 4) zu lösen.

10) abc und $a'b'c'$ seien zwei Dreiecke, deren Ecken und Seiten sich paarweise entsprechen. Man beweise die beiden Sätze:

α) Wenn die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden liegen, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt.

β) Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden.

Anleitung zum Beweis von α). m, n, r seien die auf einer Geraden G gelegenen Punkte, in welchen sich bezüglich die Seiten ab und $a'b'$, bc und $b'c'$, ca und $c'a'$ schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Geraden cc' mit ab und $a'b'$ bezüglich durch k und k' , so sind die Strahlenbüschel $c(m, a, k, b)$ und $c'(m, a', k', b')$ projectivisch und in perspectivischer Lage (G ist ihr perspectivischer Durchschnitt). Die Punktreihen $m, a, k, b \dots$ und $m, a', k', b' \dots$ sind daher auch projectivisch und überdies in perspectivischer Lage, woraus folgt, dass die Projectionsstrahlen aa' , bb' und cc' (oder kk') durch einen Punkt gehen. Der Beweis von β) wird analog geführt.

11) Wenn jede der geraden Linien $A, B, C \dots M$ sich um einen festen Punkt so dreht, dass der Schnittpunkt von je zwei auf einander folgenden Geraden sich auf einer festen Geraden bewegt, (eine Punktreihe beschreibt) so beschreiben die erste und die letzte Gerade (A und M) projectivische Strahlenbüschel (§ 18a).

12) Wenn jeder der Punkte $a, b, c \dots m$ sich auf einer Geraden so bewegt, dass die Verbindungslinie von je zwei aufeinander folgenden Punkten sich um einen festen Punkt dreht (einen Strahlenbüschel beschreibt), so beschreiben der erste und letzte Punkt (a und m) zwei projectivische Punktreihen.

13) Wenn die Seiten A, B, C eines Dreiecks sich so bewegen, dass dieses Dreieck immer einem andern Dreieck $\triangle$ umbeschrieben ist und zugleich zwei seiner Ecken (AB) und (BC) sich auf Seiten eines weiteren Dreiecks $\triangle'$ bewegen, so bestimmen die sich bewegenden Seiten A und C auf der dritten Seite von $\triangle'$ zwei projectivische Punktreihen.

14) Zwei Dreiecke abc und $a'b'c'$ sind gegeben. Man soll ein drittes Dreieck finden, welches dem ersten umbeschrieben und dem zweiten einbeschrieben ist (Aufgabe 13).

15) Zwei projectivische Punktreihen sind gegeben. Man soll diejenigen Projectionsstrahlen finden, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen (§ 25 α).

16) Die dualistisch entsprechende Aufgabe zu stellen und zu lösen (§ 25 a).

17) Wenn man durch den Scheitel zweier concentrischer Strahlenbüschel S, S' einen Kreis zieht, und die entsprechenden Strahlen denselben in den Punktpaaren $a, a'; b, b'; c, c'; d, d' \dots$ treffen, so schneiden sich ab und $a'b'$, ac und $a'c'$, ad und $a'd'$... auf einer Geraden G .

Andeutung. Die Strahlenbüschel a' ($a, b, c, d \dots$) und a ($a', b', c', d' \dots$) sind projectivisch, weil jeder derselben mit einem der Strahlenbüschel S und S' projectivisch ist. Ausserdem liegen diese beiden Büschel perspectivisch.

18) Zwei concentrische Strahlenbüschel seien durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt. Durch Anwendung von 17) soll man

α) zu einem beliebigen Strahle des einen Büschels den entsprechenden finden,

β) die beiden Strahlen bestimmen, welche sich selbst entsprechen.

Andeutung zu β). Die Gerade G (17) schneidet den Kreis in zwei Punkten, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

19) Zwei ähnliche Punktreihen desselben Trägers sind durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Man soll den sich selbst entsprechenden Punkt des Trägers suchen.

Die Auflösung geschieht nach 6) und § 24, Anmerkung. Der Träger der zu Hülfe genommenen Punktreihe (Aufgabe 3) muss mit dem gegebenen parallel sein.

20) Wenn zwei projectivische Punktreihen auf demselben Träger liegen, so befinden sich diejenigen Punkte, in welchen entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen, innerhalb oder ausserhalb der von den Gegenpunkten begrenzten Strecke, je nachdem die beiden Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

Andeutung. Ein Gegenpunkt theilt den Träger in zwei Aeste. Entsprechende Punkte liegen auf Aesten gleicher oder entgegengesetzter Richtung, je nachdem die Reihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

21) Wenn sich zwei projectivische Reihen auf demselben Träger befinden, so liegen diejenigen Punkte m und n , in welchen entsprechende Punkte sich decken, symmetrisch zu den Gegenpunkten.

Andeutung. Man drehe die eine Punktreihe um den Punkt m und ziehe das Parallelogramm in Betracht, welches durch m , die beiden Gegenpunkte und den Projectionsmittelpunkt gebildet ist (§ 23 a). Die beiden anfänglich in n vereinigten Punkte bilden nun mit m ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie durch den Projectionsmittelpunkt geht.

22) In zwei projectivischen Reihen ist das Product der Abstände je zweier entsprechender Punkte von den Gegenpunkten der Reihen constant

Andeutung. Man denke sich die Reihen in perspectivische Lage gebracht: Jenes Product ist alsdann dem Producte der Seiten des in der Andeutung zu 21) erwähnten Parallelogrammes, wie sich aus der Aehnlichkeit zweier Dreiecke zeigen lässt.

IV. Abschnitt.

Involutorische Gebilde.

Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel.

§ 27.

a) Erklärung. Wenn m ein Punkt einer Geraden und k eine positive oder negative Grösse ist, so existiren auf dieser Geraden unendlich viele Paare von Punkten c, d , welche der Gleichung $(mc) \cdot (md) = k$ genügen. Die Gesamtheit dieser Punktpaare wird eine involutorische Punktreihe genannt. Je zwei Punkte c, d heissen zugeordnete. m ist der Mittelpunkt und k die Potenz der involutorischen Reihe.

α) Erklärung. Unter einem involutorischen Strahlenbüschel versteht man die Gesamtheit aller Strahlenpaare, durch welche die Punktpaare einer involutorischen Punktreihe aus einem Punkte projectirt werden, welcher nicht auf dem Träger der Reihe liegt. Zwei Strahlen, welche zugeordnete Punkte der involutorischen Reihe enthalten, heissen ebenfalls zugeordnet.

Fig. 32 a.

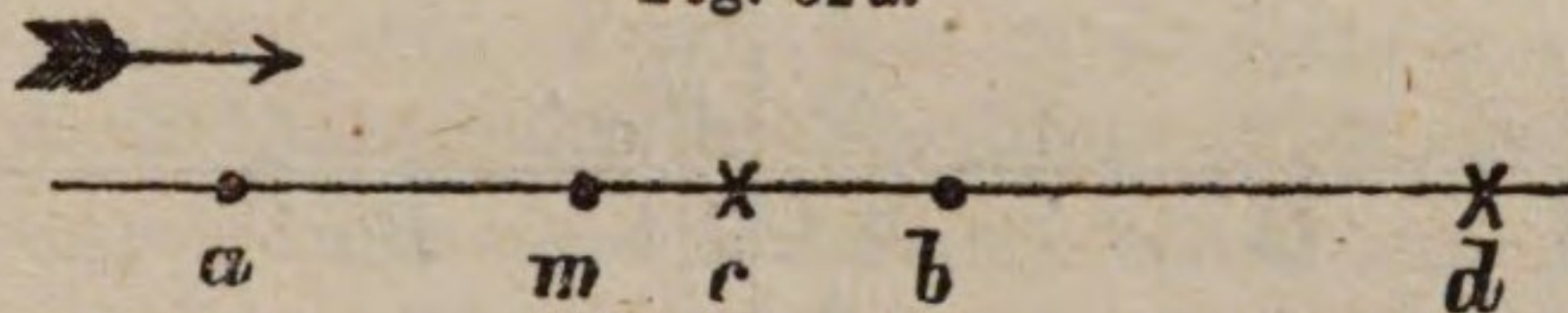
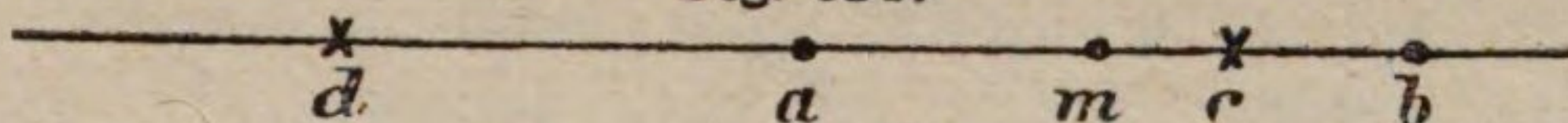


Fig. 32 b.



b) Eine involutorische Punktreihe enthält zwei sich selbst zugeordnete Punkte (Doppelpunkte) oder keine solche, je nachdem k positiv oder negativ ist. Im ersten Falle theilen je zwei zugeordnete Punkte den Abstand der Doppelpunkte a und b (Fig. 32 a) harmonisch.

β) Ein involutorischer Strahlenbüschel enthält zwei sich selbst zugeordnete Strahlen (Doppelstrahlen) oder keine solche, je nachdem er aus einer involutorischen Punktreihe mit oder ohne Doppelpunkte entstanden ist. Im ersten Falle theilen je zwei zugeordnete Strahlen die Winkel der Doppelstrahlen harmonisch.

Beweis b). Wenn die zugeordneten Punkte d und c in einen einzigen Punkt x fallen sollen, so muss $(mx)^2 = k$ sein. Man erhält also zwei sich selbst zugeordnete Punkte a und b , wenn man die Länge $\sqrt{k}$ auf beiden Seiten von m abträgt. Die Gleichung

der involutorischen Reihe heisst dann $(ma)^2 = (mb)^2 = mc \cdot (md)$, woraus nach § 11, Anmerk. zu Beispiel 2), unmittelbar die 2. Behauptung folgt.

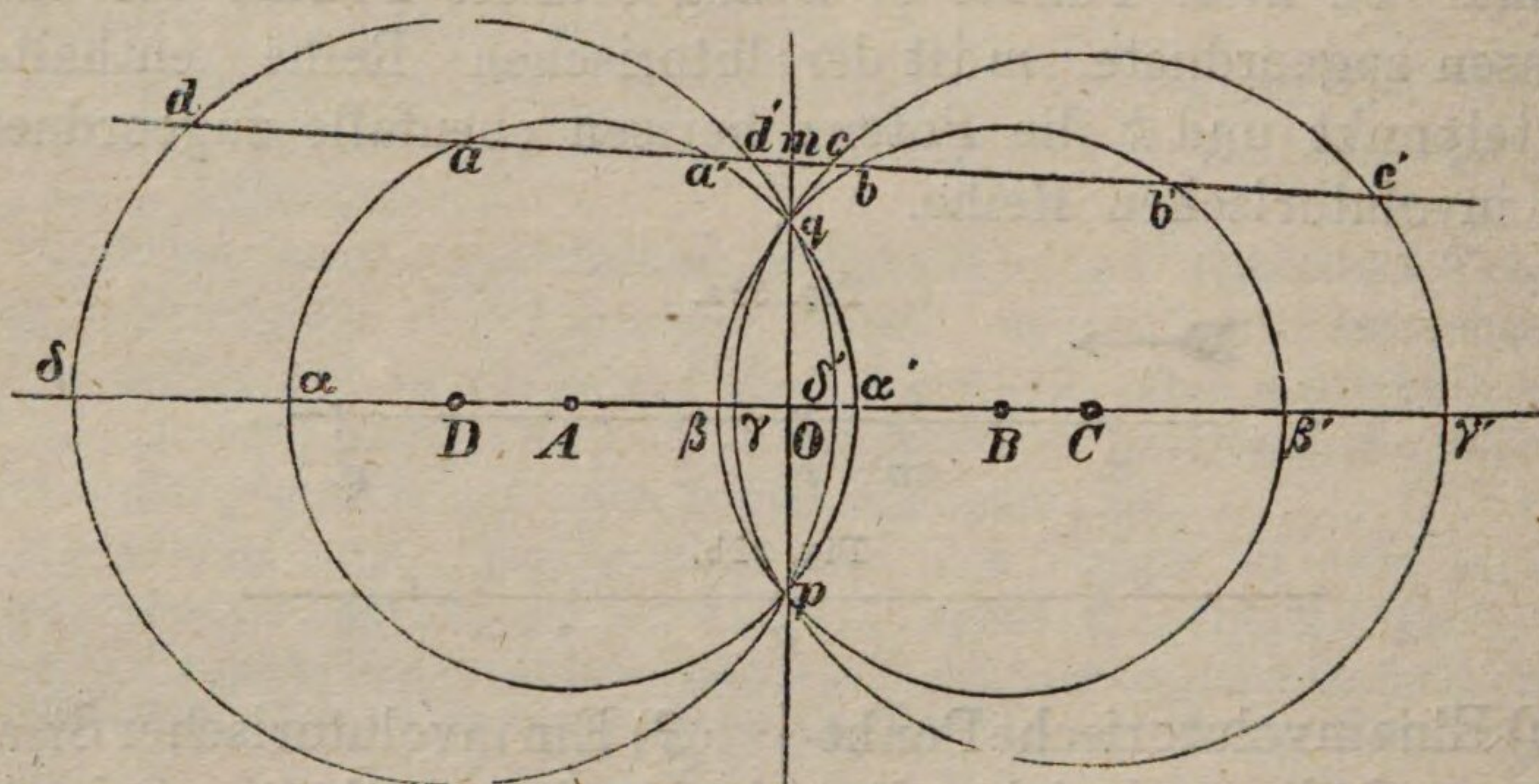
β) Die Behauptungen folgen aus b), α) und § 12 a.

§ 28. Der Büschel von Kreisen, welche durch zwei feste Punkte gehen.

a) Diejenigen Kreise, welche durch zwei feste Punkte q und p gehen, schneiden eine beliebige Gerade in den Punktepaaren einer involutorischen Reihe.

Beweis. Nach § 4. der Einleitung gilt für die Punktepaare aa' , bb' , cc' ... in Fig. 33 die Gleichung $(mq)(mp) = (ma) \cdot (ma') = (mb) \cdot (mb') = (mc) \cdot (mc')$, woraus sich nach § 27 a die Behauptung ergibt. m ist der Mittelpunkt und $(mq) \cdot (mp)$ die Potenz der involutorischen Reihe.

Fig. 33.



Anmerkung. Wenn man in dem Mittelpunkte O (Fig. 33) einer involutorischen Reihe $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$... ohne Doppelpunkte eine Senkrechte errichtet und auf derselben nach beiden Seiten die mittlere Proportionale zwischen $o\alpha$ und $o\alpha'$ (oder zwischen $o\beta$ und $o\beta'$) nach oq oder op aufträgt, so ist jedes der Dreiecke $\alpha q\alpha'$, $\beta q\beta'$, $\gamma q\gamma'$... oder $\alpha p\alpha'$, $\beta p\beta'$, $\gamma p\gamma'$ rechtwinklig. Man zeigt dies leicht, indem man z. B. die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke αoq und $\alpha' oq$ beweist und die daraus folgenden Beziehungen der Winkel beider Dreiecke benützt.

Hieraus folgt aber der Satz:

Es gibt immer zwei Punkte, von welchen aus die Punktepaare einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte unter rechten Winkeln gesehen werden. Jeder durch q und p gezogene Kreis hat den Abstand zweier zugeordneter Punkte zum Durchmesser.

b) Aufgabe. Beliebige viele Punktpaare einer involutorischen Reihe zu construiren, in welcher die Punkte aa' , bb' , (Fig. 33) zugeordnet sind.

β) Aufgabe. Beliebige viele Strahlenpaare eines involutorischen Büschels zu construiren, in welchem die Strahlen AA' , BB' zugeordnet sind.

Auflösungen. b) Man nehme einen beliebigen Punkt q ausserhalb des Trägers an und ziehe durch $aa'q$ und $bb'q$ zwei Kreise. Dieselben schneiden sich noch in einem weiteren Punkte p und alle Kreise, welche durch p und q gehen, treffen die Gerade in Punktpaaren der involutorischen Reihe.

β) Man schneide die 4 Strahlen durch eine Gerade in den Punkten aa' , bb' und projicire nach Anwendung von b) die erhaltenen Punktpaare aus dem Scheitel des Büschels (§ 27 α).

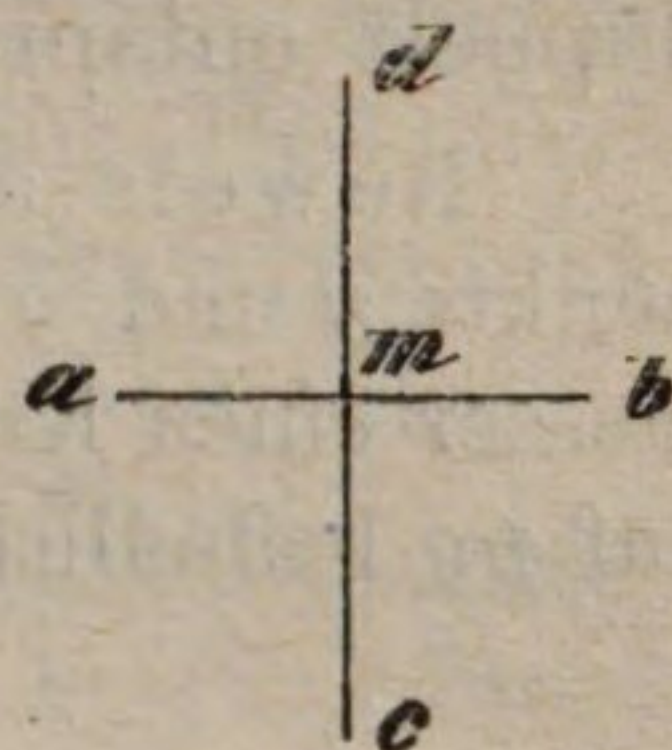
Vorbereitende Sätze.

§ 29.

a) Je zwei Strahlen eines Punktes, welche auf einander senkrecht stehen, entsprechen sich auf doppelte Weise in zwei congruenten Strahlenbüscheln.

Beweis. Man denke sich die Figur zweier auf einander senkrecht stehender Geraden M und N , welche Anfangs bezüglich mit ab und cd (Fig. 34) zusammenfallen, um den Punkt m links herum gedreht. Dann beschreiben die Strahlen M und N zwei congruente und gleichlaufende Strahlenbüschel, von welchen der eine dem andern um eine Viertelsdrehung voraus ist. Wenn M in der Lage ab ist, so befindet sich N in cd . Wenn aber M in der Lage cd angekommen ist, so befindet sich N in ab . Die Strahlen cd und ab entsprechen sich also in diesen Strahlenbüscheln doppelt, d. h. dem Strahl cd , mag er als Strahl des einen oder des andern Büschels betrachtet werden, entspricht immer der Strahl ab .

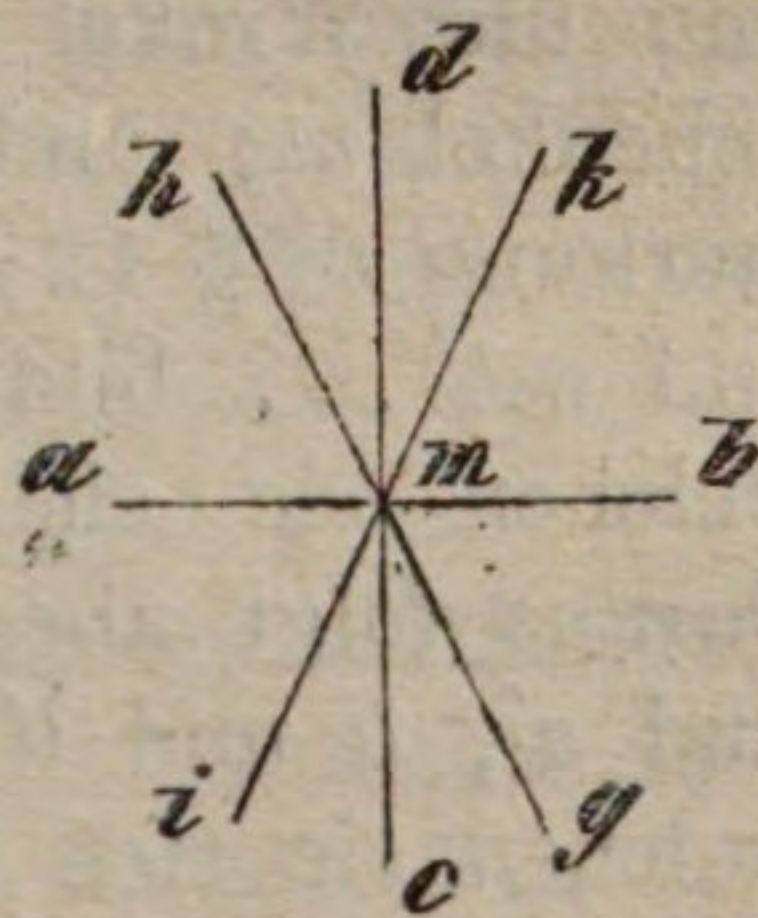
Fig. 34.



b) Je zwei durch einen Punkt m (Fig. 35) gehende Strahlen hg und ik , deren Winkel von den senkrechten Strahlen ab und cd halbirt werden, entsprechen sich auf doppelte Weise in zwei congruenten Strahlenbüscheln.

Beweis. Man denke sich zwei Strahlen M und N , welche Anfangs mit der Geraden cd zusammenfallen, bezüglich in rechts und links herumgehender Drehung so um m bewegt, dass beide Strahlen jederzeit mit cd Winkel von gleicher Grösse aber von entgegengesetztem Sinne bilden. Die beiden

Fig. 35.



Strahlen werden dann congruente Strahlenbüschel von entgegengesetztem Sinne beschreiben. Wenn M den Winkel dmk beschrieben hat und in die Lage von ik gekommen ist, so ist N durch eine entgegengesetzte Drehung in die Lage gh gekommen. Ist jedoch M bis nach hg gelangt, so ist N bei ik angekommen. ik und hg entsprechen sich also in beiden Büscheln doppelt, d. h. dem Strahl ik , mag er als Strahl des einen oder des andern Büschels betrachtet werden, entspricht immer der Strahl gh . Es ist noch zu bemerken, dass in den Schenkeln des rechten Winkels entsprechende Strahlen beider Büschel zusammenfallen.

§ 30. Identität involutorischer Gebilde mit projectivischen Gebilden, deren Elemente sich doppelt entsprechen.

a) Eine involutorische Punktreihe ist die Vereinigung zweier projectivischer Punktreihen, deren Punkte sich paarweise doppelt entsprechen.

α) Ein involutorischer Strahlenbüschel ist die Vereinigung zweier projectivischer Strahlenbüschel, deren Strahlen sich paarweise doppelt entsprechen.

Beweis a. 1) Wenn die involutorische Reihe zwei Doppelpunkte p und q (Fig. 36) hat, so zeichne man über pq als Durchmesser einen Kreis und projicire aus einem beliebigen Punkte m die auf pq befindliche involutorische Reihe. Wenn aa' ein Punktepaar

Fig. 36.

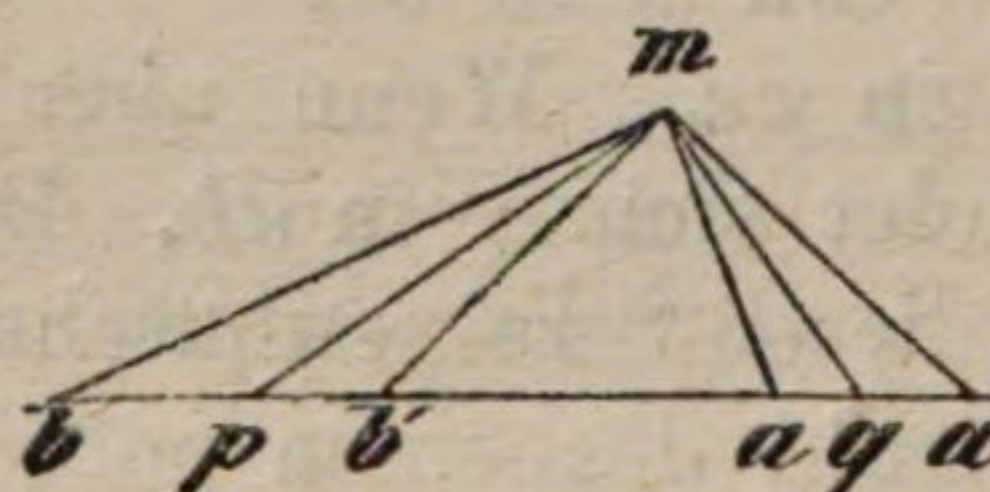
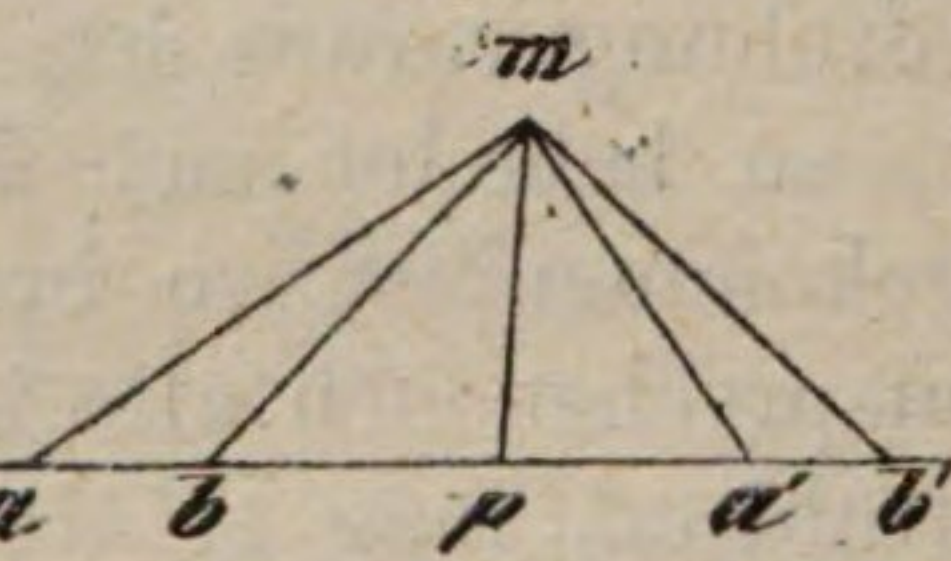


Fig. 37.



der Letztern ist, so sind a, a', p, q vier harmonische Punkte (§ 27b) und die Winkel der Strahlen ma und ma' werden durch die Schenkel mq und mp des rechten Winkels pmq halbiert (Anmerkung zu § 12 γ). Die zugeordneten Strahlen ma und ma' , mb und mb' ... bilden also zwei projectivische Strahlenbüschel, in welchen sie sich auf doppelte Weise entsprechen (§ 29b). Daraus folgt aber nach §. 18a, dass die zugeordneten Punkte a und a' , b und b' ... zwei projectivische Punktreihen bilden, in welchen sie sich ebenfalls auf doppelte Weise entsprechen.

2) Wenn die involutorische Reihe keine Doppelpunkte hat, so gibt es zwei Punkte, aus welchen ihre Punktepaare a, a' ; b, b' ; ... (Fig. 37) unter rechten Winkeln gesehen werden (An-

merkung zu § 28). Nach § 29a werden die Punktepaare der involutorischen Reihe aus einem dieser Punkte m durch Strahlenpaare $ma, ma'; mb, mb' \dots$ projecirt, deren Strahlen sich in zwei projectivischen Strahlenbüscheln auf doppelte Weise entsprechen. Hieraus folgt wie unter 1) die Richtigkeit der Behauptung nach § 18a.

α) Der gegebene involutorische Strahlenbüschel muss durch Projection einer involutorischen Punktreihe aus einem Punkte m entstanden sein. Die zugeordneten Punkte a und a', b und $b' \dots$ dieser Punktreihe bilden zwei projectivische Punktreihen, in welchen sie sich auf doppelte Weise entsprechen. Die zugeordneten Strahlen ma und ma', mb und $mb' \dots$ müssen also nach § 18a zwei projectivische Strahlenbüschel bilden, in welchen sie sich ebenfalls auf doppelte Weise entsprechen.

b) Wenn in zwei projectivischen Punktreihen desselben Trägers zwei Punkte sich doppelt entsprechen, so ist dasselbe bei allen andern Punktepaaren der Fall und dieselben bilden eine involutorische Punktreihe.

β) Wenn in zwei projectivischen Strahlenbüscheln desselben Scheitels zwei Strahlen sich doppelt entsprechen, so ist dasselbe bei allen andern Strahlenpaaren der Fall und dieselben bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Beweis b) Wenn die Punkte a und a' sich in zwei projectivischen Punktreihen doppelt entsprechen und b, b' ein anderes Paar entsprechender Punkte ist, so entsprechen den Punkten a, a', b der ersten Punktreihe die Punkte a', a, b' der zweiten. Man kann aber auch eine involutorische Punktreihe construiren, in welcher a, a' und b, b' zwei Paare entsprechender Punkte sind (§. 28b) und diese stellt die Vereinigung zweier projectivischer Punktreihen dar, in welchen den Punkten a, a', b der einen Reihe ebenfalls die Punkte a', a, b' der andern entsprechen (§ 30a). Die Punktepaare dieser involutorischen Punktreihe müssen also mit den Paaren entsprechender Punkte in den gegebenen Reihen zusammenfallen (§ 18b).

β) Die beiden Strahlenbüschel projeciren sich auf eine Gerade, welche nicht durch ihren gemeinschaftlichen Scheitel geht, als zwei projectivische Punktreihen, in welchen sich diejenigen Punkte doppelt entsprechen, welche die Projectionspunkte der beiden sich doppelt entsprechenden Strahlen sind. In diesen beiden Punktreihen entsprechen sich also nach b) je zwei Punkte doppelt und sie bilden eine involutorische Reihe. Die Behauptung folgt demnach aus § 27 α .

§ 31. Folgerungen.

Dass eine involutorische Punktreihe aus jedem Punkte, der nicht auf ihrem Träger gelegen ist, durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt wird, folgt schon aus der Definition § 27 α . Dagegen kann der umgekehrte Satz erst an dieser Stelle bewiesen werden.

a) Ein involutorischer Strahlenbüschel wird durch jede Gerade, welche nicht durch den Scheitel geht, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten.

Beweis. Der involutorische Strahlenbüschel stellt die Vereinigung zweier projectivischer Strahlenbüschel dar, deren Strahlen sich doppelt entsprechen. Dieselben projiciren sich auf die genannte Gerade als zwei projectivische Punktreihen, deren Punkte sich ebenfalls doppelt entsprechen (§ 18a). Die Behauptung folgt also aus § 30b.

b) Zwei Paare a, a' und b, b' zugeordneter Elemente bestimmen ein einziges involutorisches Gebilde.

Beweis. Zu einem beliebigen Elemente m des einen Gebildes kann nur ein einziges Element m' des andern zugeordnet sein, denn m und m' müssen entsprechende Elemente zweier projectivischer Gebilde sein, deren projectivische Beziehung durch drei Paare $a, a'; a', a; b, b'$ vollständig bestimmt ist.

Anmerkung. Wenn m der Mittelpunkt und k die Potenz einer involutorischen Reihe sind, so befinden sich die Doppelpunkte in der Entfernung $\sqrt{k}$ zu beiden Seiten von m . Je nachdem k positiv oder negativ ist, wird $\sqrt{k}$ reell und imaginär sein und man spricht, zumal in der analytischen Geometrie von reellen oder imaginären Doppelpunkten der involutorischen Reihe. Aus ähnlichen Gründen schreibt man einem involutorischen Strahlenbüschel reelle oder imaginäre Doppelstrahlen zu. Bei Annahme dieser Begriffe kann man alsdann sagen: Ein involutorisches Grundgebilde ist durch seine reellen oder imaginären Doppelemente bestimmt. Bei Anwendung dieser Ausdrucksweise in den zu späteren Paragraphen gehörigen Uebungen denken wir jedoch die imaginären Doppelemente immer durch zwei Paare zugeordneter Elemente bestimmt.

§ 32. Aufgaben.

a) Aufgabe. In einem involutorischen Strahlenbüschel zwei zugeordnete Strahlen aufzusuchen, welche einen rechten Winkel mit einander bilden.

Auflösung. Wenn der involutorische Strahlenbüschel zwei Doppelstrahlen hat, so schliessen die Halbierungslinien der von diesen Strahlen gebildeten Winkel einen rechten Winkel ein. Wenn der involutorische Strahlenbüschel keine Doppelstrahlen hat, so schneide man denselben durch eine Gerade G in einer involutorischen Punktreihe und suche die beiden Punkte m und n auf, von welchen aus die Punktepaare dieser Reihe unter rechten Winkeln gesehen werden (Anmerkung zu § 28). Ein Kreis, welcher durch m , n und den Scheitel des gegebenen Büschels gelegt wird, trifft die Gerade G in zwei Punkten, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

Anmerkung. Wenn zwei Strahlenpaare existiren, welche der Bedingung der Aufgabe genügen, so stehen je zwei zugeordnete Strahlen des involutorischen Büschels auf einander senkrecht, wie aus § 29a folgt.

b) Aufgabe. Zwei projectivische Punktreihen so zu legen, dass sie eine involutorische Punktreihe bilden.

β) Aufgabe. Zwei projectivische Strahlenbüschel so zu legen, dass sie einen involutorischen Strahlenbüschel bilden.

Auflösung b). Wenn zwei projectivische Punktreihen in dieselbe Gerade so gelegt werden, dass die Gegenpunkte beider Reihen in denselben Punkt p der Geraden fallen, so bilden die Punktreihen nach § 30b eine involutorische Punktreihe, weil der Punkt p und der unendlich ferne Punkt der Geraden sich in beiden Punktreihen auf doppelte Art entsprechen. Wenn umgekehrt zwei projectivische Punktreihen involutorisch liegen, so muss der unendlich ferne Punkt des Trägers, als Punkt einer jeden der beiden Reihen betrachtet, dem gleichen Punkt p des Trägers in der andern Reihe entsprechen.

β) Wenn man zwei projectivische Strahlenbüschel so legt, dass die sich entsprechenden rechten Winkel sich decken (§ 25b), so bilden die Strahlenbüschel nach 28 β einen involutorischen Strahlenbüschel, weil die Schenkel des rechten Winkels sich in beiden Büscheln doppelt entsprechen.

Anmerkung. Wenn zwei projectivische Gebilde so liegen, dass sie ein einziges involutorisches Gebilde darstellen, so hat das letztere Doppelemente oder nicht, je nachdem die beiden projectivischen Gebilde ungleichlaufend oder gleichlaufend sind, wie man für die Punktreihen aus der Gleichung der involutorischen Reihe in § 27a und hierauf für Strahlenbüschel durch Anwendung von § 27 α erkennen kann.

§ 33.

Uebungen.

1) Wenn a, b, c, d vier Punkte einer Geraden sind, so ist die Punktgruppe (a, b, c, d) jeder Punktgruppe, wie (b, a, d, c) , projectivisch, welche aus der ersten dadurch entsteht, dass man die 4 Punkte willkürlich in zwei Paare theilt und die Punkte jedes Paares unter einander vertauscht.

Andeutung. Die Punktpaare a, b und c, d bestimmen eine involutorische Reihe, woraus unmittelbar folgt, dass die Gruppen (a, b, c, d) und (b, a, d, c) projectivisch sind.

2) Man soll den dualistisch zugeordneten Satz aussprechen und beweisen.

3) Die 3 Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks schneiden jede Gerade G in drei Punktpaaren a und a' , b und b' , c und c' einer involutorischen Reihe.

Andeutung. Auf der durch a gehenden Seite des vollständigen Vierecks liegen noch drei Punkte, nämlich ein Nebeneck und zwei Ecken des Vierecks. Projicirt man diese 4 Punkte nach einander aus jedem der noch übrigen Ecken des vollständigen Vierecks auf die Gerade G , so erkennt man (§ 18a), dass die Punktgruppen $ab'a'c$ und $ac'a'b$ projectivisch sind. Da aber auch nach 1) die Gruppe $ac'a'b$ mit $a'bac'$ projectivisch ist, so folgt hieraus (§ 18a) die Projectivität von $ab'a'c$ und $a'bac'$, woraus nach § 30b die Behauptung folgt.

4) Man beachte in 3) den besondern Fall, wo G durch ein oder zwei Nebenecken geht (§ 13c, § 12α).

5) Die 3 Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks sind mit drei Paaren zugeordneter Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels parallel.

Andeutung. Benütze die Aufgabe 4) und die unendlich ferne Gerade (§ 22d) als diejenige, welche die Seiten des Vierecks schneidet. Wende auch § 22a an.

6) Die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus jedem weiteren Punkte durch drei Strahlenpaare eines involutorischen Strahlenbüschels projicirt (Beweis analog demjenigen von 3).

7) Man beachte den Fall, wo dieser Punkt auf einer Diagonale gelegen ist, oder in den Schnittpunkt zweier Diagonalen fällt (§ 13 γ § 12a).

8) Wenn man einen Punkt m mit jedem Eck eines Dreiecks verbindet und jedesmal durch m eine Parallele mit der diesem Eck gegenüberliegenden Seite zieht, so erhält man 3 Strahlenpaare eines involutorischen Büschels (eine Involution von Strahlen).

Andeutung. Die Seiten des Dreiecks und die unendlich ferne Gerade bestimmen ein vollständiges Vierseit. Man wende Aufgabe 6) an.

9) In einer involutorischen Punktreihe, welche durch zwei Punktpaare a und a' , b und b' bestimmt ist, soll man zu jedem fünften Punkte c den zugehörigen c' mit Hülfe des Lineals allein finden (§ 33, 3).

Andeutung. Nach 3). Man kann drei Geraden, welche durch a, a', b beliebig gezogen sind, als Seiten des vollständigen Vierecks annehmen.

10) In einem involutorischen Strahlenbüschel, welches durch zwei Strahlenpaare A und A' , B und B' bestimmt ist, soll man zu jedem fünften Strahle C den zugehörigen C' mit Hülfe des Lineals allein finden (Aufgabe 6).

11) Eine involutorische Punktreihe sei bestimmt

α) durch ihre beiden Doppelpunkte; man soll zu jedem Punkte den zugeordneten finden (§ 13 δ);

β) durch einen Doppelpunkt und ein Paar entsprechender Punkte; man soll den zweiten Doppelpunkt finden (§ 13 δ).

12) Die dualistisch zugeordneten Aufgaben zu stellen und zu lösen (§ 13 d).

13) Eine involutorische Punktreihe sei durch zwei Paare zugeordneter Punkte bestimmt. Man suche

α) den Mittelpunkt der Reihe,

β) die etwa vorhandenen Doppelpunkte.

Andeutung. α) wird nach 9) gelöst, da dem Mittelpunkte der Reihe der unendlich ferne Punkt zugeordnet ist (der Gebrauch des Zirkels ist zum Ziehen einer Parallelen gestattet); nachdem der Mittelpunkt gefunden ist, wird β) durch Aufsuchen einer mittleren Proportionalen gelöst.

14) Wie kann man die Aufgabe 12 auch durch § 28a und I, § 84a*) lösen?

15) Das zwei gegebenen involutorischen Reihen gemeinschaftliche Paar zugeordneter Punkte zu bestimmen.

Andeutung. Durch Anwendung von § 28b und I, § 33d**).

16) Die Aufgabe 15) zu lösen, wenn beide involutorische Reihen durch ihre Doppelpunkte bestimmt sind (Aufgabe 13 β).

17) Es sind zwei Paare von Punkten a und a' , b und b' gegeben. Man soll zwei Punkte suchen, welche mit jedem der beiden Paare vier harmonische Punkte bilden (Aufgabe 15).

V. Abschnitt.

Pol und Polare in Bezug auf den Kreis.

Pol und Polare.

§ 34.

a) Wenn man einen beliebigen Punkt p (Fig. 38) mit dem Mittelpunkte eines Kreises verbindet und auf dem so bestimmten Durchmesser denje-

α) Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine beliebige Gerade P (Fig. 38) eine Senkrechte fällt und auf dem so bestimmten Durchmesser

*) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

**) Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht.

nigen Punkt m sucht, welcher mit p zusammen den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst die in m errichtete Senkrechte P die Polare von p .

Aus α) folgt, dass zugleich p der Pol von P ist.

β) Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist durch seine Berührungssehne dargestellt.

Die Polare eines Kreispunktes fällt mit seiner Tangente zusammen.

Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punktes trifft den Kreis nicht.

Beweis β). Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus α) und dem zweiten Beispiel in § 11. Wenn zweitens p auf dem Kreise liegt, so fällt m mit p zusammen und die Polare steht im Endpunkte senkrecht auf dem Radius, das heisst, sie ist die Tangente des Kreises im Punkte p . Wenn endlich p innerhalb des Kreises liegt, so fällt der 4te harmonische Punkt des Durchmessers und dadurch auch die in ihm errichtete Senkrechte, die Polare, ausserhalb des Kreises. Die Sätze unter β) sind die Umkehrungen der Sätze β) und folgen leicht aus denselben.

γ) Die Punkte einer Geraden (welche den Kreis nicht berührt) und die Schnittpunkte der zugehörigen Polaren mit derselben Geraden bilden die Punktepaare einer involutorischen Punktreihe.

Wenn die gegebene Gerade den Kreis in zwei Punkten trifft, so sind dieselben Doppelpunkte der involutorischen Reihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis nicht trifft, so enthält die involutorische Reihe keine Doppelpunkte

Beweis. cd (Fig. 38) sei die gegebene Gerade und p ein beliebiger Punkt auf ihr. n sei der Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren von p und Cq sei senkrecht auf cd gefällt. Da der Winkel nmp recht ist, so liegen die Punkte n, m, p auf einem Kreise, dessen Durchmesser np ist. $(Cm) \cdot (Cp)$ und $(qn) \cdot (qp)$ sind die Potenzen der Punkte C und q in Bezug auf diesen Kreis. Die Differenz der Potenzen beider Punkte ist der Differenz der

denjenigen Punkt p sucht, welcher mit dem Fusspunkte m den Durchmesser harmonisch theilt, so heisst p der Pol von P .

Aus α) folgt, dass zugleich P die Polare von p ist.

β) Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt ihrer Endestangenten.

Der Pol einer Tangente fällt mit ihrem Berührungspunkte zusammen.

Der Pol einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, ist innerhalb des Kreises gelegen.

Quadrate ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkte des Kreises nmp gleich (Einleitung § 4d). Da dieser Mittelpunkt mit q und C ein bei q rechtwinkliges Dreieck bildet, so ist die Differenz jener Quadrate gleich $(cq)^2$. Aus $(Cm) \cdot (Cp) - (qm) \cdot (qp) = (Cq)^2$ und $(Cm) \cdot (Cp) = (Cb)^2$, (§ 11 Anmerkung zu Beispiel 2) erhält man durch Abziehen der ersten Gleichung von der zweiten: $(Cb)^2 - (Cq)^2 = (qm) \cdot (qp)$.

$(cb)^2 - (cq)^2$ ist aber nichts anderes als $(qd)^2$, so dass man zu der Gleichung $(qd)^2 = (qc)^2 = (qn) \cdot (qp)$ kommt, durch welche nach § 27a die Behauptung bewiesen ist.

Anmerkung. Wenn die gegebene Gerade den Kreis berührt, so zerfällt die involutorische Reihe, indem alsdann die Polare eines jeden auf dieser Tangente gelegenen Punktes durch den Berührungspunkt geht.

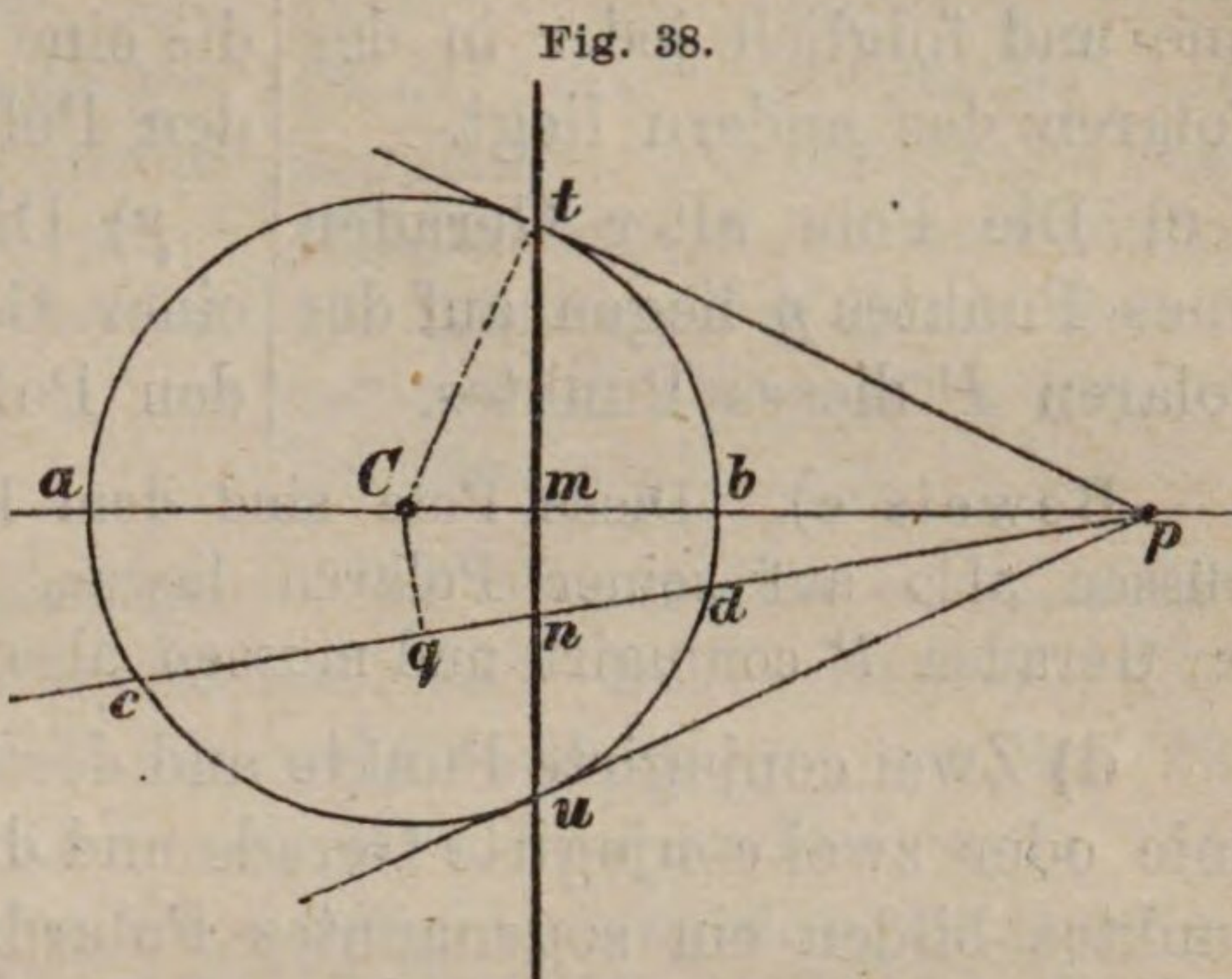


Fig. 38.

Conjugirte Punkte.

§ 35.

a) Wenn der Punkt q auf der Polaren von p liegt, so liegt auch p auf der Polaren von q .

Beweis a). Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1) Wenn die Gerade pq den Kreis nicht berührt, so erzeugen die Punkte dieser Geraden und die zugehörigen Polaren eine involutorische Reihe auf derselben, in welcher die Punkte p und q einander zugeordnet sind (§ 34c). Würde nun die Polare von q nicht durch p , sondern durch einen andern Punkt m der Geraden pq gehen, so wären q und m auch zugeordnete Punkte, das heisst, der Punkt q würde sowohl mit p als auch mit m ein Paar zugeordneter Punkte derselben involutorischen Reihe bilden, was unmöglich ist.

2) Wenn pq Tangente ist, so muss q der Berührungspunkt dieser Tangente sein (§ 34b). Dann fällt aber die Polare von q mit dieser Tangente zusammen und geht deshalb durch p , was zu beweisen war. Der Satz α) ist nur eine andere Ausspruchsweise des Satzes a).

b) Erklärung. Zwei Punkte heissen conjugirt, wenn der eine und folglich jeder in der Polaren des andern liegt.

c) Die Pole aller Geraden eines Punktes p liegen auf der Polaren P dieses Punktes.

β) Erklärung. Zwei Geraden heissen conjugirt, wenn die eine und folglich jede durch den Pol der andern geht.

γ) Die Polaren aller Punkte einer Geraden P gehen durch den Pol p dieser Geraden.

Beweis c). Diese Pole sind dem Punkte p conjugirt und müssen also auf seiner Polaren liegen. γ) Diese Polaren sind der Geraden P conjugirt und müssen also durch ihren Pol gehen.

d) Zwei conjugirte Punkte und der Pol ihrer Verbindungslinie oder zwei conjugirte Gerade und die Polare ihres Schnittpunktes bilden ein sogenanntes Polardreieck, das heisst ein Dreieck, in welchem jede Seite die Polare des gegenüberliegenden Ecks und jedes Eck der Pol der gegenüberliegenden Seite ist (b und β).

§ 36. Fortsetzung.

a) Die conjugirten Punkte einer Geraden bilden eine involutorische Punktreihe.

Die Doppelpunkte dieser Reihe sind durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise dargestellt.

α) Die conjugirten Strahlen eines Punktes bilden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Die Doppelstrahlen dieses Büschels sind durch die von dem Punkte an den Kreis gelegten Tangenten dargestellt.

Beweis. a) Dieser Satz folgt aus § 34 c und § 35 b. α) Die durch den gegebenen Punkt p gezogenen Geraden und ihre Pole bestimmen auf der Polaren P von p eine involutorische Reihe (§ 34 c, § 36 a). Die Gesamtheit aller conjugirten Strahlen, welche durch p gehen, wird nun durch diejenigen Strahlen dargestellt, welche jene involutorische Reihe aus dem Punkte p projectiren (§ 35 β). Der Beweis folgt also aus § 27 α .

b) Zusatz. Jede Secante wird durch zwei conjugirte Punkte derselben harmonisch getheilt.

β) Zusatz. Die Winkel zweier Tangenten werden durch zwei conjugirte Strahlen ihres Schnittpunktes harmonisch getheilt.

Anmerkung. Mit Rücksicht auf die Anmerkung in § 31. kann man sagen:

Die reellen oder imaginären Punkte, welche eine Gerade mit einem Kreise gemein hat, sind die reellen oder imaginären Doppelpunkte derjenigen involutorischen Reihe, welche durch die conjugirten Punkte jener Geraden gebildet ist.

c) Wenn ein vollständiges Viereck einem Kreise einbeschrieben ist, so ist die Polare jedes Nebenecks durch die Verbindungslinie der übrigen dargestellt. (Die Nebenecken bilden ein Polardreieck.)

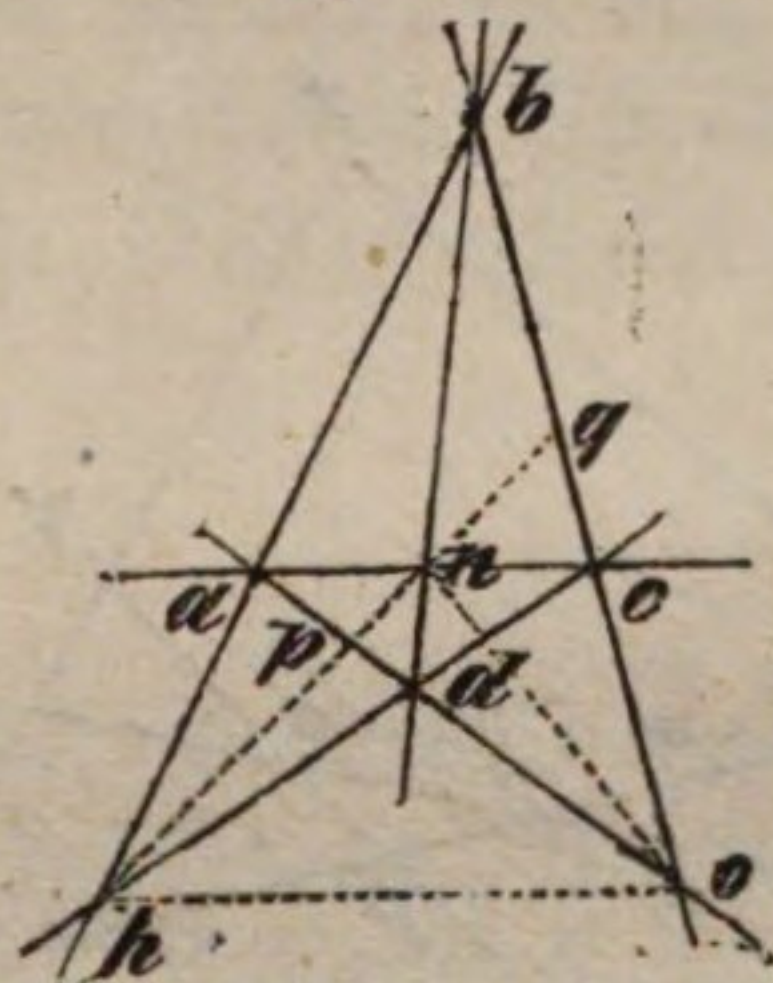
Die reellen oder imaginären Tangenten eines Kreises, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, sind die reellen oder imaginären Doppelstrahlen desjenigen involutorischen Strahlenbüschels, welcher durch die conjugirten Strahlen jenes Punktes gebildet wird.

γ) Wenn ein vollständiges Vierseit einem Kreise umbeschrieben ist, so ist der Pol jeder Diagonale durch den Schnittpunkt der übrigen dargestellt. (Die Diagonalen bilden ein Polardreieck.)

Beweise.

Wenn (Fig. 39) a, b, c, d die Ecken des Vierecks sind, so stellen ad und bc zwei Secanten des Kreises dar, welche sich in dem

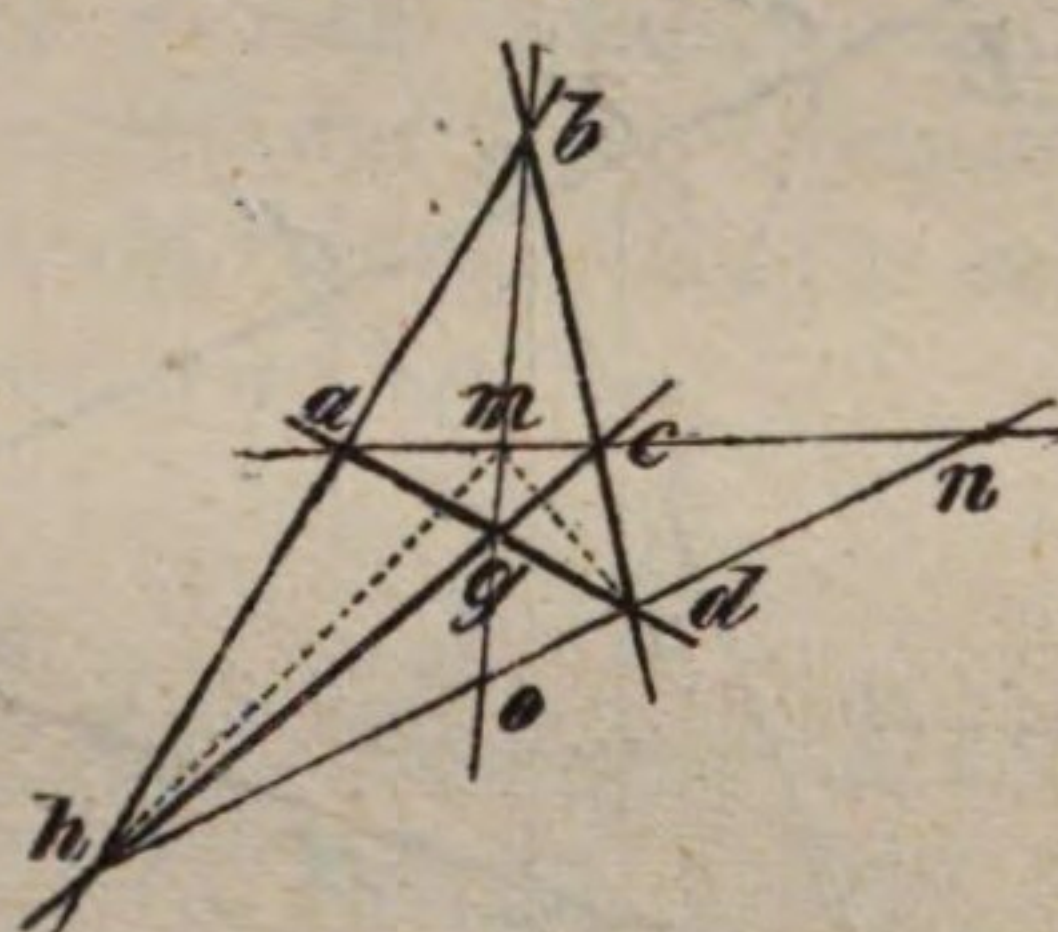
Fig. 39.



Nebeneck o schneiden. Die Verbindungslinie nh der übrigen Nebenecken theilt diese beiden Secanten in p und q harmonisch (§ 13b). Die Punkte p und q sind also dem Punkte o conjugirt (§ 36b) und ihre Verbindungslinie pq oder nh ist die Polare von o .

Wenn (Fig. 40) ab, bc, cg, ga die Seiten des Vierseits sind, so sind h und d die Scheitel zweier Tangentenwinkel und hd ist eine

Fig. 40.



Diagonale des Vierseits. Die nach dem Schnittpunkte der übrigen Diagonalen gezogenen Geraden hm und dm theilen mit hd die Winkel der durch h und d gezogenen Tangenten harmonisch (§ 13β). Die Geraden hm und dm sind deshalb der Geraden hd conjugirt (§ 36β) und schneiden sich in ihrem Pole m .

d) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einem beliebigen Punkte die zugehörige Polare ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

δ) Aufgabe. Wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, so soll zu einer beliebigen Geraden der zugehörige Pol ohne Hülfe des Zirkels gefunden werden.

Auflösung. Die Construction von d) folgt unmittelbar aus c). Um δ auszuführen, suche man zu zwei Punkten der gegebenen Geraden die zugehörigen Polaren. Sie schneiden sich in dem gesuchten Pole.

VI. Abschnitt.

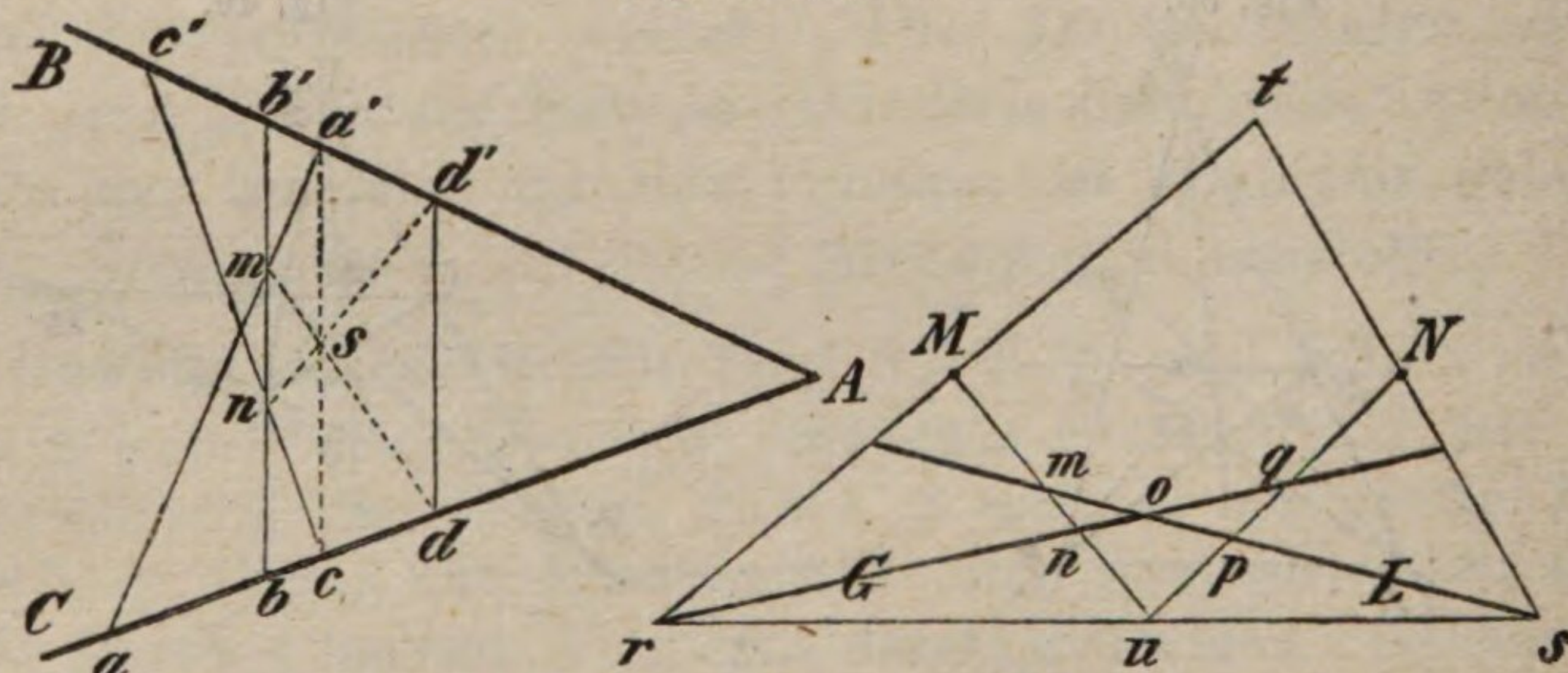
Projectivische Gebilde in schiefer Lage.

§ 37. Aufgaben.

a) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die Geraden AC und AB sind

α) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel M und N (Fig. 42) sind,

Fig. 41 und 42.



(Fig. 41), kennt man 3 Paare entsprechender Punkte a, a' ; b, b' ; c, c' . Es soll zu jedem weiteren Punkte der einen Reihe der entsprechende Punkt der andern gefunden werden, ohne die Reihen in perspectivische Lage zu bringen.

kennt man 3 Paare entsprechender Strahlen Mm, Nm ; Mo, No ; Mq, Nq . Es soll zu jedem weiteren Strahle des einen Büschels der entsprechende Strahl des andern gefunden werden, ohne die Büschel in perspectivische Lage zu bringen.

Auflösung.

Wenn man einen beliebigen Punkt s auf der Verbindungsline der sich nicht entsprechenden Punkte a' und c mit den beiden Punkten m und n des Projectionsstrahls bb' verbindet, so bestimmen die erhaltenen Geraden ms und ns zwei entsprechende Punkte d und d' beider Reihen.

Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Wenn man durch den Schnittpunkt u der sich nicht entsprechenden Strahlen Mm und Nq eine beliebige Gerade legt und ihre Schnittpunkte r und s mit den Geraden oq und om aufsucht, so sind hierdurch zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns der beiden Büschel bestimmt.

Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Beweis.

Die projectivischen Punktreihen $a, b, c, \dots$ und $a', b', c', \dots$ werden aus den Punkten m und n durch die projectivischen Strahlenbüschel $m(a, b, c, \dots)$ und $n(a', b', c', \dots)$ projecirt. Diese Strahlenbüschel sind aber in perspectivischer Lage, weil der Strahl mn sich selbst entspricht und $a'c$ ist der perspectivische Durchschnitt derselben. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel $Mm, Mo, Mq, \dots$ und $Nm, No, Nq, \dots$ projeciren sich auf die Geraden oq und om als zwei projectivische Punktreihen $n, o, q, \dots$ und $m, o, p, \dots$. Diese Punktreihen sind aber in perspectivischer Lage, weil der Punkt o sich selbst entspricht und u ist der Projectionsmittelpunkt derselben. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

In dem Sechseck $nm a' d' dc$ (Fig. 41), dessen Seiten durch die beiden Träger und 4 Projectionsstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte s .

b) Man soll diejenigen Punkte bestimmen, welche in jeder der projectivischen Punktreihen in Fig. 41 dem Schnittpunkte A der beiden Träger entsprechen.

In dem Sechseck $Mt Nq om$ (Fig. 42), dessen Ecken durch die beiden Scheitel und 4 Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten in 3 Punkten r, u, s einer Geraden.

β) Man soll diejenigen Strahlen bestimmen, welche in jedem der projectivischen Strahlenbüschel in Fig. 42 der Verbindungsline MN der Scheitel entsprechen.

Auflösung.

Man ziehe in Fig. 41 die Gerade nA und bestimme ihren Schnittpunkt mit $a'c$. Diejenige Gerade, welche diesen Punkt mit m verbindet, bestimmt auf AC den einen der gesuchten Punkte. Der andere wird auf analoge Weise gefunden (§ 37a).

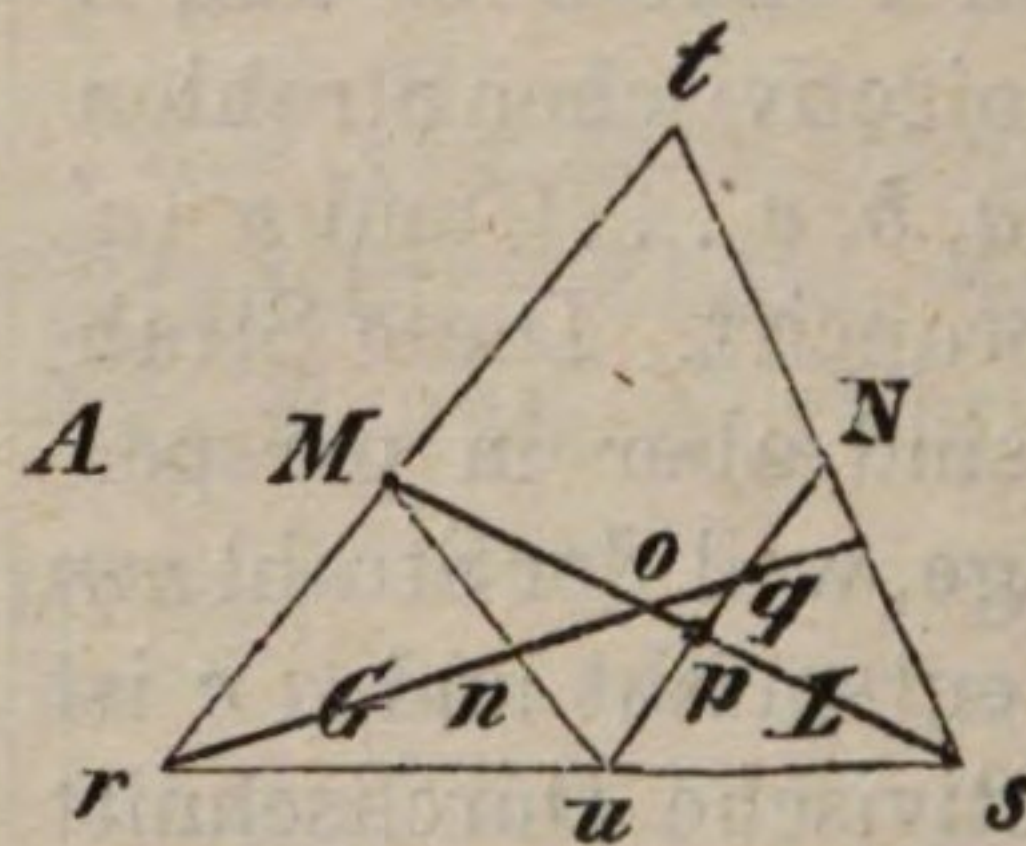
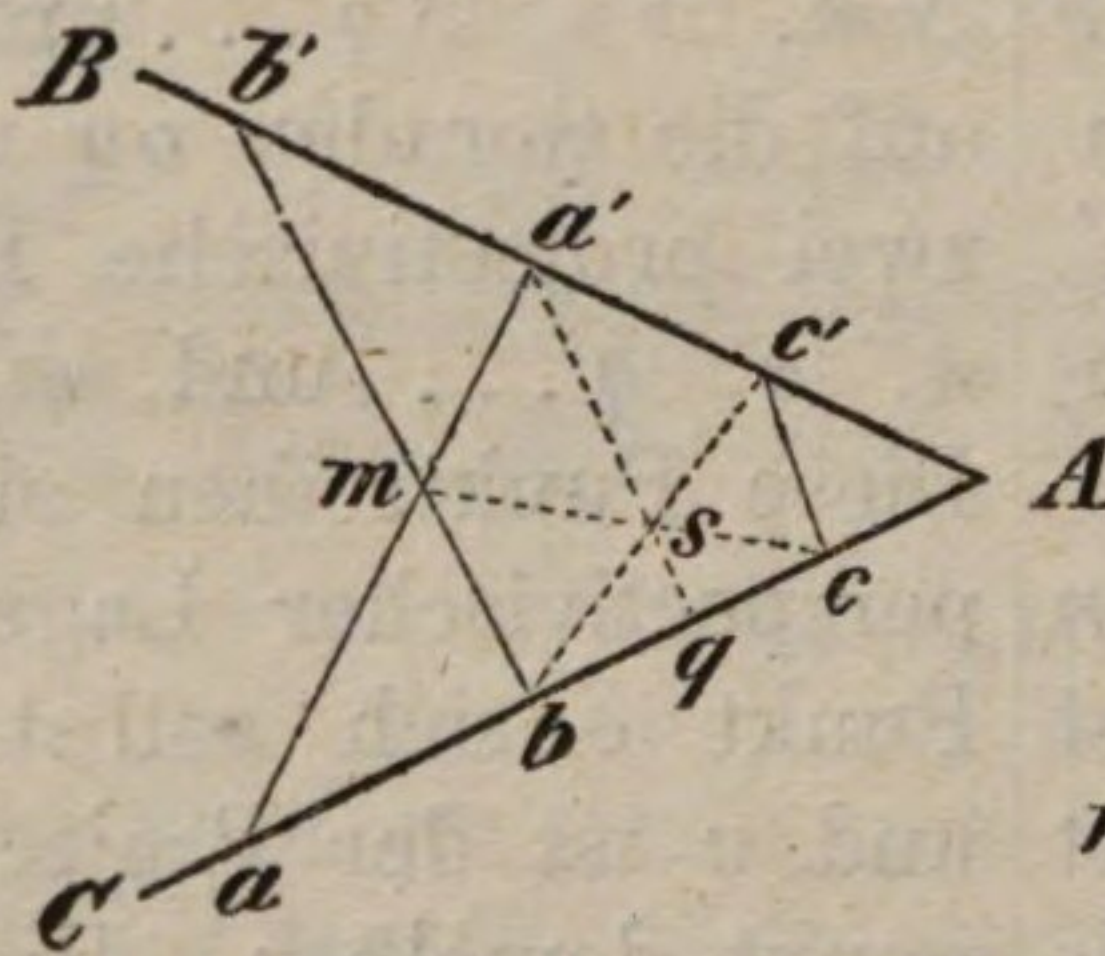
Man suche in Fig. 42 den Schnittpunkt der Geraden MN und nq , welchen man sodann mit dem Punkt n durch eine Gerade verbindet. Diese Gerade trifft die Linie mp in einem Punkte, welcher auf dem gesuchten Strahle des Büschels N gelegen ist. Der andere Strahl wird auf analoge Weise gefunden (§ 37 α).

Aufgaben.

a) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger die Geraden AC und AB (Fig. 43)

α) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel die Punkte M und N (Fig. 44)

Fig. 43 u. 44.



sind, kennt man zwei Paare entsprechender Punkte a, a' , und b, b' , sowie denjenigen Punkt q der Reihe AC , welcher dem Schnittpunkte A der Träger entspricht.

Man soll zu jedem weiteren Punkte der Reihe AC den entsprechenden Punkt der andern Reihe suchen.

sind, kennt man zwei Paare entsprechender Strahlen Mo und No , Mq und Nq , sowie denjenigen Strahl Mn des Büschels M , welcher der Verbindungslinie MN der Scheitel entspricht.

Man soll zu jedem weiteren Strahle des Büschels M den entsprechenden Strahl des andern Büschels suchen.

Auflösung.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt s der Geraden $a'q$ von m und b aus zwei

Wenn man durch den Schnittpunkt u von Mn und Nq eine beliebige Gerade zieht, und ihre

Strahlen zieht, so bestimmen diese auf den Trägern zwei entsprechende Punkte c und c' .

Hieraus ergibt sich die Lösung.

Schnittpunkte r, s mit der Geraden oq und oM aufsucht, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns der beiden Büschel.

Beweis.

Die projectivischen Punktreihen $abq\dots$ und $a'b'A\dots$ werden aus den Punkten m und b durch zwei projectivische und perspectivisch gelegene Strahlenbüschel $m(a, b, q\dots)$ und $b(a', b', A\dots)$ projecirt, deren perspectivischer Durchschnitt $a'q$ ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel $Mn, Mo, Mq\dots$ und $NM, No, Nq\dots$ bestimmen auf den Geraden oq und Mo zwei projectivische Punktreihen $n, o, q\dots$ und $M, o, p\dots$, welche perspectivisch liegen und deren Projectionsmittelpunkt u ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

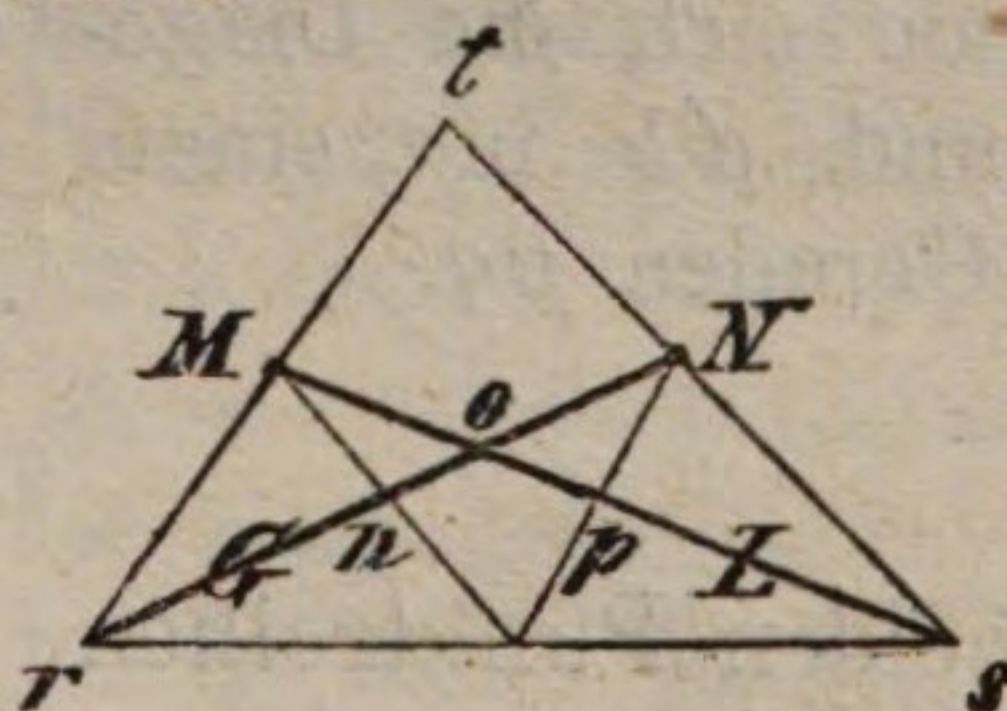
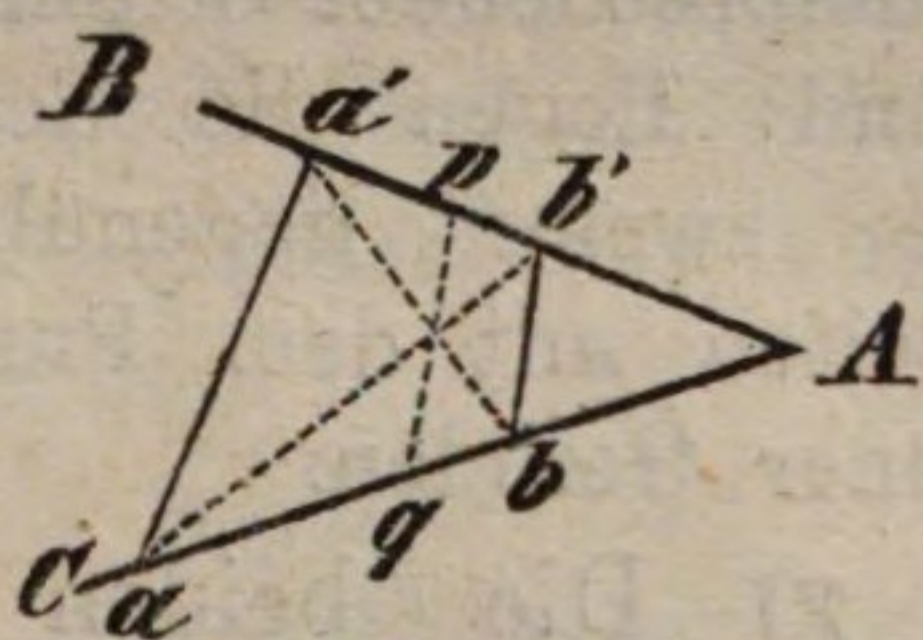
In dem Fünfeck $bma'c'e$, dessen Seiten durch die beiden Träger und drei Projectionstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Diagonalen mc und bc' mit der Geraden $a'q$ in einem Punkte s .

In dem Fünfeck $MtNqo$, dessen Ecken durch die Scheitel der Büschel und drei Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, liegen die Schnittpunkte r und s von zwei Paaren nicht anliegender Seiten mit dem Schnittpunkte u der fünften Seite und des Strahles Mn auf einer Geraden.

b) Von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger AC

β) Von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Schei-

Fig. 45 u. 46.



und AB sind (Fig. 45), kennt man ein Paar entsprechender Punkte a und a' , sowie diejenigen Punkte p und q , welche in beiden Reihen dem Schnitt-

tel M und N sind (Fig. 46), kennt man ein Paar entsprechender Strahlen Mo und No , sowie diejenigen Strahlen Mu und Nu , welche in beiden Büscheln der

punkte A der Träger entsprechen. Man soll zu jedem Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern finden.

Verbindungsline der Scheitel entsprechen. Man soll zu jedem Strahle des einen Büschels den entsprechenden Strahl des andern finden. 

Auflösung.

Wenn man einen beliebigen Punkt s von pq mit a und a' durch die Geraden as und $a's$ verbindet, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Punkte b' und b . Hieraus ergibt sich die Auflösung der Aufgabe.

Wenn man durch den Punkt u eine beliebige Gerade zieht, und ihre Schnittpunkte r und s mit den Strahlen Mo und No aufsucht, so bestimmen dieselben zwei entsprechende Strahlen Mr und Ns . Hieraus ergibt sich die Auflösung.

Beweis.

Die perspectivischen Punktreihen $a, q, A \dots$ und $a', A, p \dots$ werden aus den Punkten a' und a durch zwei projectivische und perspectivisch gelegene Strahlenbüschel a' ($a, q, A \dots$) und a ($a', A, p \dots$) projecirt, deren perspectivischer Durchschnitt pq ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Die projectivischen Strahlenbüschel $MN, Mo, Mu \dots$ und $Nu, No, NM \dots$ bestimmen auf den Geraden No und Mo zwei projectivische und perspectivisch gelegene Punktreihen $N, o, n \dots$ und p, o, M , deren Projectionenmittelpunkt u ist. Hierin ist der Beweis gelegen.

Anmerkung.

In dem Viereck $aa'b'b$, dessen Seiten durch die Träger und zwei Projectionstrahlen gebildet sind, schneiden sich die Diagonalen ab' und $a'b$ in einem Punkte der Geraden pq .

In dem Viereck $MoNt$, dessen Ecken durch die Scheitel der Büschel und zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen gebildet sind, liegen die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten mit dem Punkte u auf einer Geraden.

c) Die beiden Punktreihen auf AC und AB in Fig. 45 werden aus jedem Punkte der Geraden pq durch zwei projectivische und involutorisch gelegene Strahlenbüschel projecirt.

γ) Die beiden Strahlenbüschel M und N in Fig. 46 projeciren sich auf jede durch u gehende Gerade als zwei projectivische und involutorisch gelegene Punktreihen.

Beweis.

Die beiden Strahlenbüschel sind nach § 18a projectivisch und liegen involutorisch, weil der Richtung ab' , mag sie als Strahl des einen oder des andern Strahlenbüschels angesehen werden (als sa oder sb'), immer in dem andern Büschel ein Strahl derselben Richtung $a'b$ (nämlich sa' oder sb) entspricht.

Die beiden auf der Geraden rs entstehenden Punktreihen sind nach § 18a projectivisch und liegen involutorisch, weil dem Punkte r , mag er als Punkt der einen oder andern Reihe angesehen werden (als auf Mt oder No liegend) immer in der andern Reihe derselbe Punkt s (auf Nt oder Mo liegend) entspricht.

Die Curve als Punktgebilde oder Tangentengebilde.

§ 39.

Wenn ein Punkt a sich bewegt, so beschreibt er eine Gerade oder eine „Curve.“

Der Punkt a ist in jeder Lage ein „Punkt“ der Curve.

Die Verbindungslinie des bewegten Punktes a mit einem festen Curvenpunkte b stellt eine Sehne dar, welche sich um b dreht.

Da b ein Curvenpunkt ist, so muss es sich ereignen, dass der bewegte Punkt a , welcher die Curve beschreibt, unendlich nahe an b herankommt, mit b zusammenfällt und sich wieder entfernt.

In dem Momente des Zusammenfallens der Punkte a und b nimmt die sich drehende Gerade ab eine Lage P ein, in welcher man sie als „Tangente“ des Punktes b bezeichnet.

Wenn eine Gerade A sich bewegt, so dreht sie sich um einen Punkt oder sie beschreibt eine „Umhüllung.“

Die Gerade A ist in jeder Lage eine „Erzeugende“ der Umhüllung.

Der Schnitt der bewegten Geraden A mit einer festen Erzeugenden B stellt einen Punkt dar, welcher sich auf B bewegt.

Da B eine Erzeugende ist, so muss es sich ereignen, dass die Erzeugende A , welche die Umhüllung beschreibt, sich der Richtung von B immer mehr zuwendet, mit B zusammenfällt und sich dann wieder von B weg dreht.

In dem Momente des Zusammenfallens der Erzeugenden A und B nimmt der sich bewegende Punkt (AB) eine Lage an, in welcher man ihn als „Berührungspunkt“ der Erzeugenden B bezeichnet.

Unmittelbar vor oder nach diesem Momente jedoch befinden sich auf der um b gedrehten Geraden zwei unendlich nahe Curvenpunkte, nämlich der feste Punkt b und der bewegliche Punkt a , welcher noch nicht ganz mit b zusammengefallen ist oder sich schon wieder um eine unendlich kleine Strecke von b entfernt hat.

Die Tangente P des Punktes b kann demnach als Verbindungslinie zweier unendlich naher auf einander folgender Curvenpunkte angesehen werden.

Dadurch erscheint auch jeder Curvenpunkt b als Schnittpunkt zweier auf einander folgender Tangenten, welche nämlich diesen Punkt mit dem nächst vorhergehenden und mit dem nächstfolgenden verbinden.

Wenn man daher die Tangenten einer Curve als Erzeugende einer Umhüllung ansieht, so sind die Berührungspunkte der Erzeugenden durch die Curvenpunkte dargestellt.

Hieraus folgt:

a) Ein bewegter Punkt und eine bewegte Gerade erzeugen gleichartige Gebilde, nämlich eine Curve, welche das erste Mal als Punktgebilde und das zweite Mal als Tangentengebilde auftritt. Eine Tangente kann als Verbindungslinie zweier auf einander folgender Curvenpunkte, ein Curvenpunkt als Schnittpunkt zweier auf einander folgender Tangenten angesehen werden.

Unmittelbar vor oder nach dieser Lage des auf B bewegten Punktes gehen durch denselben zwei in ihrer Richtung unendlich wenig verschiedene Erzeugende, nämlich die feste Erzeugende B und die bewegliche Erzeugende A , welche noch nicht ganz mit A zusammengefallen ist oder sich schon wieder um einen unendlich kleinen Winkel gegen B geneigt hat.

Der Berührungspunkt p der Erzeugenden B kann demnach als Schnittpunkt zweier unendlich naher auf einander folgender Erzeugenden angesehen werden.

Dadurch erscheint auch jede Erzeugende B als Verbindungslinie zweier aufeinander folgender Berührungspunkte, welche nämlich durch den Schnitt dieser Erzeugenden mit der nächst vorhergehenden und der nächstfolgenden gebildet werden.

Wenn man daher die Berührungspunkte einer Umhüllung als Punkte einer Curve ansieht, so sind die Tangenten der Curvenpunkte durch die Erzeugenden der Umhüllung dargestellt.

Curven, welche das Erzeugniss projectivischer Gebilde sind. § 40.

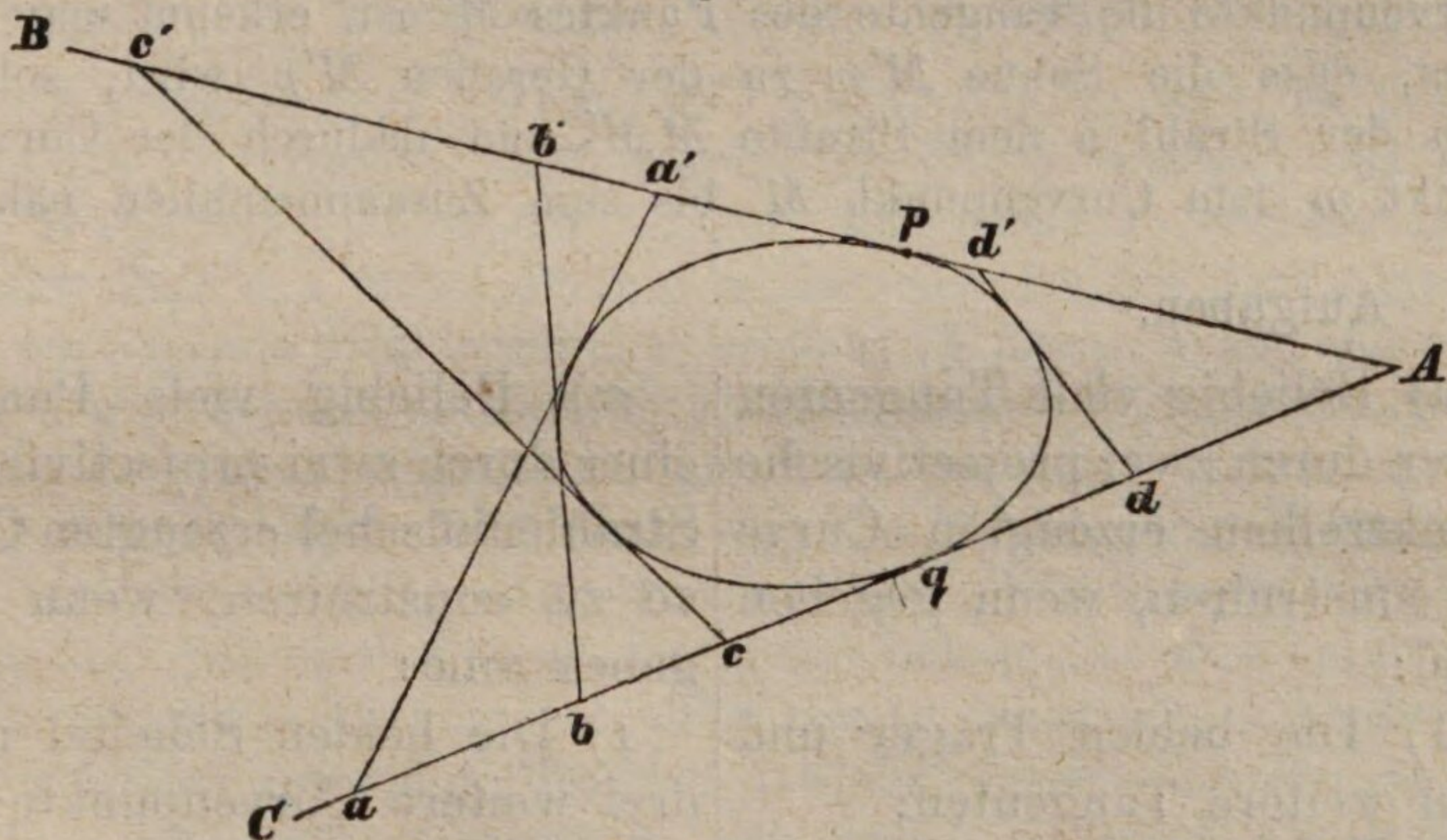
a) Zwei projectivische Punktreihen erzeugen eine Curve, von welcher die Projectionsstrahlen und die Träger der Punktreihen Tangenten sind. Die Berührungspunkte der Träger sind diejenigen Punkte, welche in beiden Punktreihen dem Schnittpunkte der Träger entsprechen.

α) Zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugen eine Curve, auf welcher die Projectionspunkte und die Scheitel der Büschel liegen. Die Tangenten in den Scheitelpunkten sind diejenigen Strahlen, welche in beiden Strahlenbüscheln der Verbindungslinie der Scheitel entsprechen.

a) $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$ in Fig. 47 seien zwei projectivische Punktreihen auf den Trägern AC und AB . q und p seien diejenigen Punkte, welche in beiden Punktreihen dem Schnittpunkte A der beiden Träger entsprechen.

Man denke sich den Punkt a des Trägers AC in stetiger Bewegung auf dieser Geraden. Der zugehörige Punkt a' des Trägers AB wird ebenfalls in stetiger Weise den Ort der entsprechenden Punkte durchlaufen. Der hierdurch in Bewegung gesetzte Projectionsstrahl wird also eine Curve einhüllen, das heisst

Fig. 47.

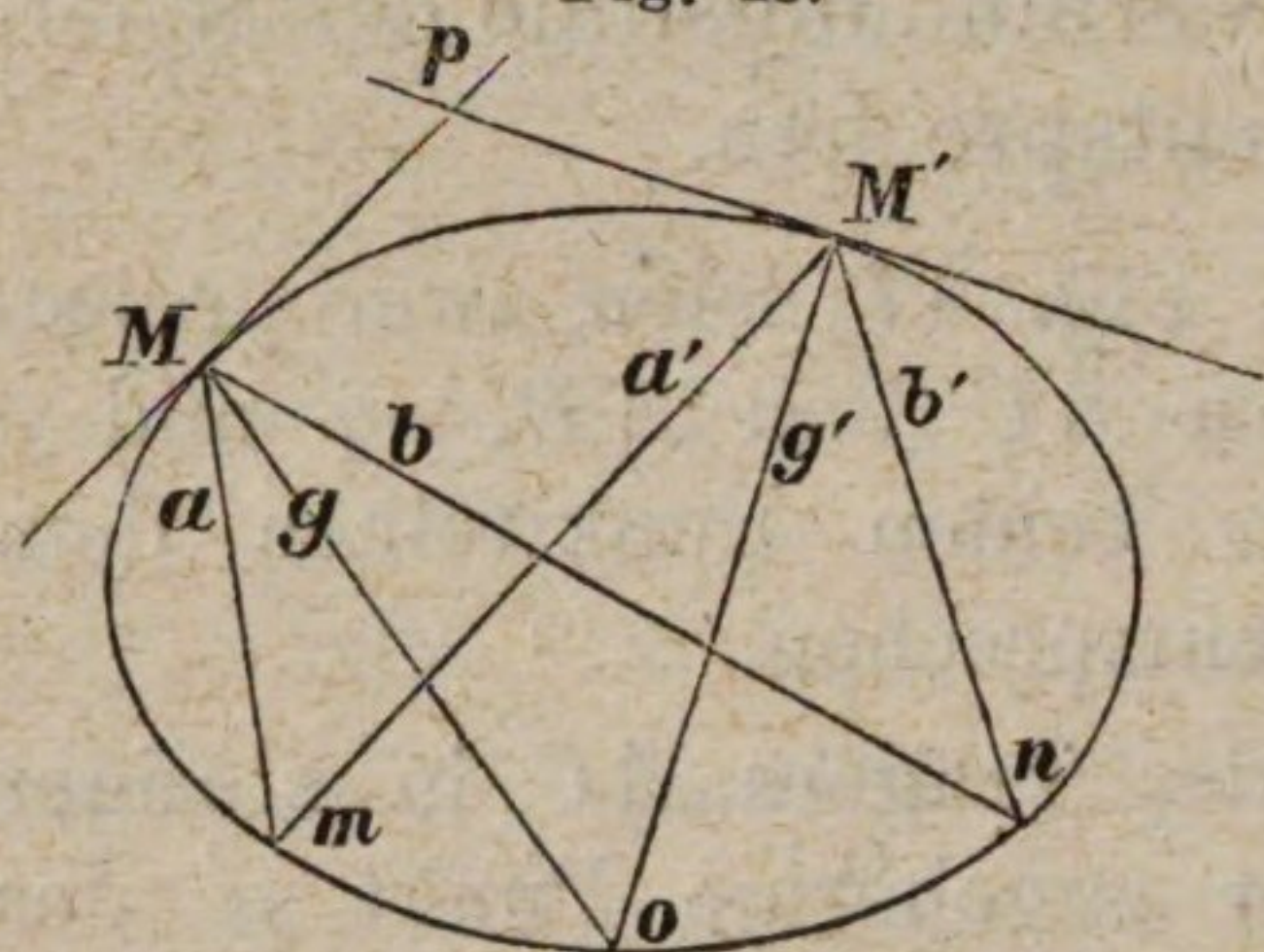


der bewegte Strahl wird in jedem Augenblicke Tangente an eine gewisse Curve sein, deren Punkte durch die Schnittpunkte zweier auf einander folgender Projectionsstrahlen dargestellt sind. Jeder der Träger ist Tangente an die Curve, weil er zugleich als Projectionsstrahl aufgefasst werden kann. Der Träger AB zum Beispiel ist Projectionsstrahl, weil er die entsprechenden Punkte A

und B beider Reihen verbindet. Dass aber p als Schnittpunkt zweier auf einanderfolgender Tangenten der Berührungspunkt von AB ist, erkennt man daraus, dass der gemeinsame Punkt a' der beweglichen Tangente aa' und des Trägers AB zu dem Punkte p wird, sobald der Punkt a sich dem Punkte A und dadurch die Tangente aa' der Tangente AB bis zum Zusammenfallen nähert.

α) M und M' in Fig. 48 seien die Scheitel zweier projectivischer Strahlenbüschel $a, g, b \dots a', g', b' \dots$. Mp und $M'p$ seien diejenigen Strahlen, welche in beiden Büscheln der Verbindungslinie ihrer Scheitel entsprechen. Denkt man sich den

Fig. 48.



Strahl a um M in stetiger Bewegung, so durchläuft der Strahl a' die Orte der entsprechenden Strahlen in dem Büschel a', g', b' ebenfalls in stetiger Weise. Der Projectionspunkt m beschreibt hierbei eine ununterbrochene Curve. Die Scheitel der Büschel sind ebenfalls Curvenpunkte, weil sie als Schnittpunkte entsprechender Strahlen angesehen werden können. M' zum Beispiel ist der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen MM' und $M'p$ beider Büschel. Dass aber $M'p$ als Verbindungslinie zweier auf einander folgender Curvenpunkte die Tangente des Punktes M' ist, erkennt man daraus, dass die Sehne $M'm$ zu der Geraden $M'p$ wird, sobald sich der Strahl a dem Strahle MM' und dadurch der Curvenpunkt m dem Curvenpunkt M' bis zum Zusammenfallen nähert.

§ 41. Aufgaben.

α) Beliebige viele Tangenten einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die beiden Träger und drei weitere Tangenten;

2) Die beiden Träger, der Berührungspunkt auf einer derselben und zwei Tangenten;

3) Die beiden Träger, ihre Berührungspunkte und eine Tangente.

α) Beliebige viele Punkte einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die beiden Scheitel und drei weitere Curvenpunkte;

2) Die beiden Scheitel, die Tangente in einem derselben und zwei Curvenpunkte;

3) Die beiden Scheitel, die Tangenten in denselben und ein Curvenpunkt.

Die Auflösungen folgen aus § 40a und § 37a, § 38a und b.

Die Auflösungen folgen aus § 40 α und § 37 α , § 38 α und β .

Anmerkung. In allen Fällen existirt nur eine Curve, welche den gegebenen Bedingungen genügt (§ 18c).

b) Diejenigen Tangenten einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt m gehen.

β) Diejenigen Punkte einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve zu finden, welche auf einer gegebenen Geraden G liegen.

Auflösungen.

Die beiden Punktreihen werden aus m durch zwei projectivische und concentrische Strahlenbüschel projecirt. Die sich selbst entsprechenden Strahlen der letzteren sind die gesuchten Tangenten (§ 25 α).

Die beiden Strahlenbüschel projeciren sich auf G als zwei projectivische Punktreihen desselben Trägers, deren sich selbst entsprechende Punkte die gesuchten Curvenpunkte sind (§ 25a).

c) In der Ebene einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve Punkte anzugeben, durch welche keine Tangenten der Curve gehen.

γ) In der Ebene einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve Gerade anzugeben, auf welchen keine Curvenpunkte liegen.

Auflösung c). Wenn AC und AB (Fig. 47) die projectivischen Punktreihen sind, welche die Curve erzeugen und p, q die Berührungspunkte der Träger darstellen, so werden diese Punktreihen aus jedem Punkte m der Geraden pq durch involutorisch liegende Strahlenbüschel projecirt (§ 38c). Wenn der hierdurch gebildete involutorische Strahlenbüschel Doppelstrahlen besitzt, so stellen letztere die durch m gehenden Tangenten der Curve vor (§ 41b). Man denke sich den Punkt m auf der Geraden pq in Bewegung, so dass er von einem Orte innerhalb pq aus sich über den einen Endpunkt p hinaus bewege, so wird bei diesem Uebergange des Punktes m über p hinaus der eine von den beiden involutorisch liegenden Strahlenbüscheln, dessen Scheitel m ist, seinen Drehungssinn wechseln, der andere Büschel jedoch denselben beibehalten. Wenn daher von zwei Punkten m und n der Geraden pq der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke pq gelegen ist, so wird von den involutorischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel p und q sind, der eine durch gleichlaufende, der andere durch ungleichlaufende projectivische Strahlenbüschel gebildet, welche involutorisch liegen. Durch den einen Punkt gehen

also zwei sich selbst entsprechende Strahlen und durch den andern keine solche (Anmerkung zu § 32 b). Einer von diesen beiden Punkten m und n ist also immer ein solcher, durch welchen keine Tangenten der Curve gehen.

γ) In Fig. 48 sind M und M' die Scheitel zweier gleichlaufender projectivischer Strahlenbüschel, welche eine Curve erzeugen. Mp und $M'p$ seien die Tangenten der Curve in den Scheitelpunkten. Auf jedem Strahle G des Punktes p projeciren sich die beiden Strahlenbüschel als zwei involutorisch liegende projectivische Punktreihen. Wenn die dadurch gebildete projectivische Punktreihe Doppelpunkte besitzt, so stellen dieselben die auf der Geraden G liegenden Curvenpunkte dar. Wenn der Strahl G in dem Winkel MpM' gelegen ist, so sind die beiden Punktreihen ungleichlaufend und die involutorische Punktreihe, welche durch dieselben dargestellt wird, enthält zwei Doppelpunkte. Wenn dagegen der Strahl G die Nebenwinkel des Winkels MpM' theilt, so sind jene Punktreihen gleichlaufend und bilden eine involutorische Punktreihe ohne Doppelpunkte. Wenn die beiden Strahlbüschel M und M' ungleichlaufend gewesen wären, so hätte man das umgekehrte Resultat erhalten. Wenn sonach von zwei Strahlen des Punktes p der eine den Winkel MpM' und seinen Scheitelwinkel, der andere die Nebenwinkel dieser Winkel theilt, so liegen immer auf dem einen dieser Strahlen zwei Curvenpunkte und auf dem andern keine solche.

Dritter Cursus.

Projectivische Figuren. Kegelschnitte.

I. Abschnitt.

Perspectivische Figuren.

§ 42. Das ebene System und der Strahlenbündel.

a) Erklärung. Ein ebene System besteht aus der Gesammtheit aller Punkte und Geraden, welche einer Ebene angehören. Diese Ebene wird

α) Erklärung. Ein Strahlenbündel besteht aus der Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, welche durch einen Punkt gehen. Dieser Punkt

der Träger des ebenen Systems genannt.

b) Alle Punkte eines ebenen Systems, welche auf einer Geraden liegen, bilden eine Punktreihe. (§ 15 a.)

c) Alle Gerade eines ebenen Systems, welche durch einen Punkt gehen, bilden einen Strahlenbüschel. (§ 15 α .)

wird der Scheitel des Strahlenbündels genannt.

β) Alle Strahlen eines Strahlenbündels, welche in einer Ebene liegen, bilden einen Strahlenbüschel.

γ) Alle Ebenen eines Strahlenbündels, welche durch einen Strahl gehen, bilden einen „Ebenenbüschel.“ Derjenige Strahl, welcher den Ebenen des Büschels gemeinsam ist, wird Axe des letzteren genannt.

Beziehung des ebenen Systems auf ein Strahlenbündel. § 43.

a) Die Punkte und Geraden eines ebenen Systems werden aus einem Punkte, welcher nicht auf dem Träger des Systems gelegen ist, durch die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels projicirt. Dabei werden die Punkte einer Punktreihe durch die Strahlen eines Strahlenbüschels projicirt. Die Strahlen eines Strahlenbüschels werden durch die Ebenen eines Ebenenbüschels projicirt.

b) Zusatz. Wenn die Strahlen des Strahlenbüschels unter sich parallel sind, so werden dieselben durch einen Ebenenbüschel projicirt, dessen Axe mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist.

α) Die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels projiciren sich auf jede Ebene, welche nicht durch den Scheitel des Bündels geht, als Punkte und Geraden eines ebenen Systems. Dabei projiciren sich die Strahlen eines Strahlenbüschels als Punkte einer Punktreihe. Die Ebenen eines Ebenenbüschels projiciren sich als Strahlen eines Strahlenbüschels.

β) Zusatz. Wenn die Axe des Ebenenbüschels mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist, so projicirt sich derselbe als ein Büschel von Parallelstrahlen.

Beweis. b) Man ziehe durch den Scheitel des Strahlenbündels eine Gerade A , welche mit einem und deshalb mit jedem

Strahle des gegebenen Strahlenbüschels S parallel ist*). Diese Gerade bestimmt mit jedem Strahle von S eine Ebene desjenigen Ebenenbüschels, durch welches der Büschel S projecirt wird. Hiermit ist der Beweis geliefert, dass die Gerade A mit dem Träger des ebenen Systems parallel ist**). Die Behauptung unter β) wird indirect bewiesen, indem man zeigt, dass zwei Strahlen des entstandenen Strahlenbüschels sich nicht schneiden können.

§ 44. Beziehung ebener Systeme auf einander.

Die Strahlen und Ebenen eines Strahlenbündels erzeugen auf zwei Ebenen, welche nicht durch den Scheitel des Strahlenbündels gehen, zwei ebene Systeme. Die beiden ebenen Systeme heissen in Rücksicht auf diese Lage perspectivisch.

a) Erklärung. In perspectivischen ebenen Systemen heissen je zwei Punkte, welche auf einem Strahle des Strahlenbündels liegen, entsprechend oder homolog.

b) Wenn Punkte des einen Systems auf einer Geraden liegen, so liegen die entsprechenden Punkte des andern Systems auf der homologen Geraden.

c) Einer Punktreihe des einen Systems entspricht eine projectivische Punktreihe des andern Systems. Die Träger entsprechender Punktreihen sind homologe Gerade.

α) Erklärung. In perspectivischen Systemen heissen je zwei Gerade, welche auf einer Ebene des Strahlenbündels liegen, entsprechend oder homolog.

β) Wenn Geraden des einen Systems durch einen Punkt gehen, so gehen die entsprechenden Geraden des andern Systems durch den homologen Punkt.

γ) Einem Strahlenbüschel des einen Systems entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel des andern Systems. Die Scheitel entsprechender Strahlenbüschel sind homologe Punkte.

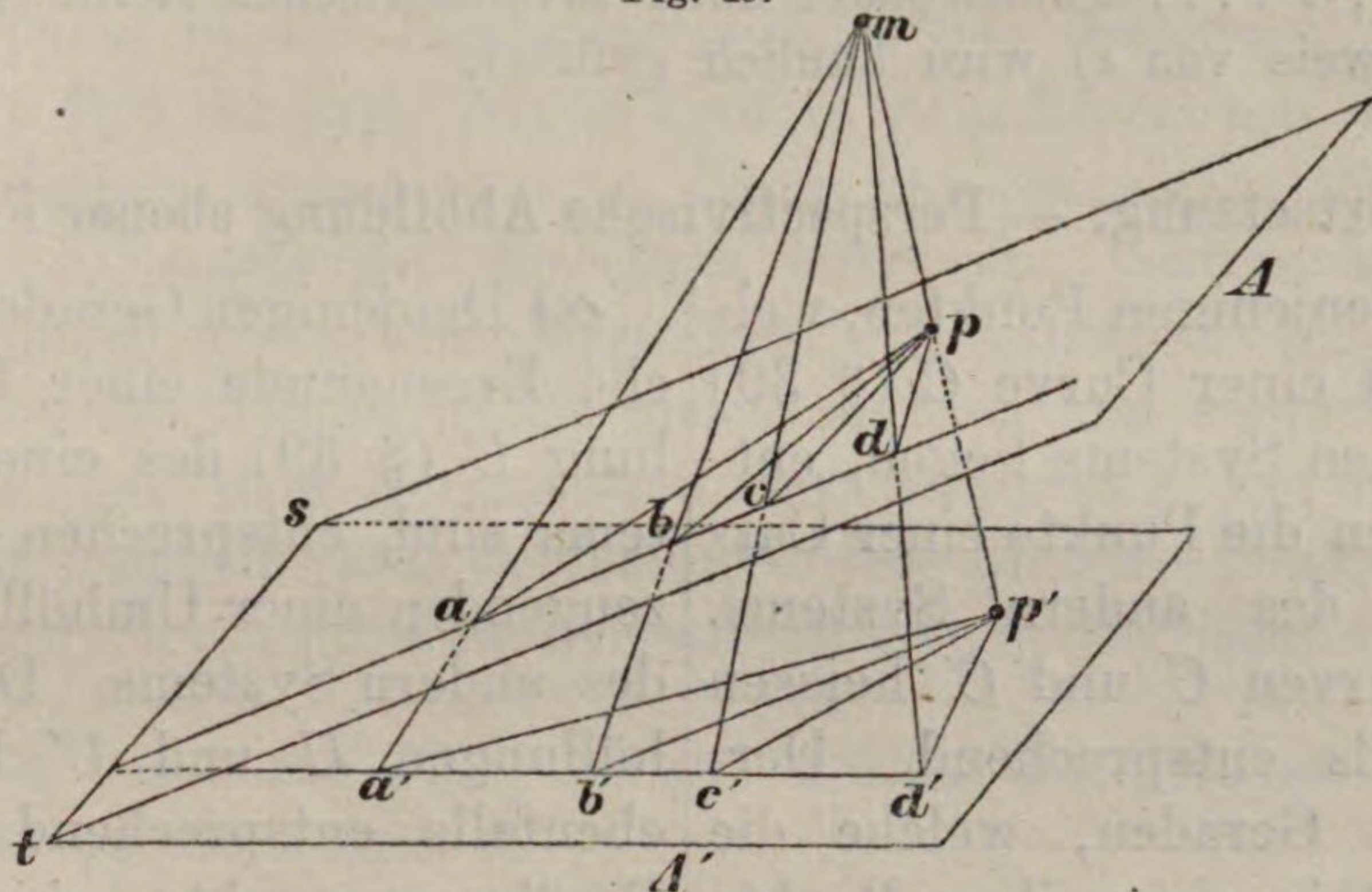
Beweis b) und c). A und A' seien die beiden Ebenen und m der Projectionsmittelpunkt. Die Punkte $a, b, c, d \dots$ einer Punktreihe werden aus m durch die Strahlen eines Strahlenbüschels

*) Nach dem stereometrischen Satze: Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

**) Stereometrischer Satz: Wenn eine Gerade mit einer Linie der Ebene parallel ist, so ist sie mit der Ebene parallel.

m ($a, b, c, d \dots$) projicirt und dieses projicirt sich auf die Ebene A' als eine Punktreihe $a', b', c', d' \dots$, welche der gegebenen Punktreihe homolog ist (§ 44a). Die beiden Punktreihen sind nach § 16 β projectivisch. Ihre Träger sind entsprechende Gerade, weil sie auf der Ebene des Strahlenbüschels m ($a, b, c, d \dots$) gelegen sind (§ 44 α).

Fig. 49.



β) und γ). Ein Strahlenbüschel S in der Ebene A (Fig. 49), dessen Scheitel der Punkt p ist, wird aus dem Punkte m durch einen Ebenen-Büschel projicirt, welcher mp zur Axe hat. Dieser Ebenenbüschel schneidet die Ebene A' in einen Strahlenbüschel S' , welcher zu S homolog ist (§ 44a). Man denke nun den Strahlenbüschel S durch eine Gerade in der Punktreihe $a, b, c \dots$ geschnitten. Weil irgend ein Punkt a der einen Punktreihe auf einem Strahle von S gelegen ist, so liegt der entsprechende Punkt a' auf dem entsprechenden Strahle von S' (§ 44b). Die beiden Strahlenbüschel S und S' sind also perspectivisch zu den beiden entsprechenden projectivischen (§ 44c) Punktreihen $a b c \dots$ und $a' b' c' \dots$ gelegen und deshalb selbst projectivisch (§ 18a). Die Scheitel p und p' sind homologe Punkte, weil sie beide auf der Axe desjenigen Ebenenbüschels liegen, durch welchen S aus m projicirt wird.

d) Zusatz. Vier harmonischen Punkten des einen Systems entsprechen vier harmonische Punkte des andern. (§ 15.)

e) Einer involutorischen
Punktreihe des einen Systems

δ) Zusatz. Vier harmonischen Strahlen des einen Systems entsprechen vier harmonische Strahlen des andern. (§ 15.)

ε) Einem involutorischen Strahlenbüschel des einen Sys-

entspricht eine involutorische Punktreihe des andern.

tems entspricht ein involutorischer Strahlenbüschel des andern.

Beweis e). Wenn $a, c; b, d \dots$ (Fig. 49) Punktpaare einer involutorischen Reihe sind, so sind $ma, mc; mb, md \dots$ Strahlenpaare eines involutorischen Büschels (§ 27 α) und deshalb $a', c'; b', d' \dots$ Punktpaare einer involutorischen Reihe (§ 31 a). Der Beweis von ϵ) wird ähnlich geführt.

§ 45. Fortsetzung. — Perspektivische Abbildung ebener Figuren.

a) Denjenigen Punkten, welche auf einer Curve C (§ 39) des einen Systems liegen, entsprechen die Punkte einer Curve C' des andern Systems. Die Curven C und C' heissen ebenfalls entsprechend. Derjenigen Geraden, welche die Curve C in einem ihrer Punkte berührt, entspricht eine Gerade, welche die Curve C' in dem entsprechenden Punkte berührt. Wenn man die Curven C und C' als Tangentengebilde ansieht, so stellen sie entsprechende Umhüllungen beider Systeme dar.

α) Denjenigen Geraden, welche Erzeugende einer Umhüllung U (§ 39) des einen Systems sind, entsprechen die Erzeugenden einer Umhüllung U' des andern Systems. Die Umhüllungen U und U' heissen ebenfalls entsprechend. Dem Berührungspunkte einer Erzeugenden von U entspricht der Berührungspunkt der entsprechenden Erzeugenden von U' . Wenn man die Umhüllungen U und U' als Punktgebilde ansieht, so stellen sie entsprechende Curven beider Systeme dar.

Beweis a). Wenn ein Punkt der einen Ebene sich so bewegt, dass er eine Curve C beschreibt, so muss der entsprechende Punkt der andern Ebene ebenfalls eine Curve C' beschreiben, denn wenn C' eine gerade Linie wäre, so müsste auch C eine gerade Linie sein (§ 44 b). Derjenigen Sehne, welche zwei beliebige Punkte von C verbindet, entspricht in der andern Figur eine Sehne, welche die entsprechenden Punkte von C' verbindet. Wenn die Endpunkte der Sehne von C' in einen einzigen Punkt p zusammenfallen, so fallen die Endpunkte der entsprechenden Sehne von C in den entsprechenden Punkt p' zusammen. Die beiden Sehnen werden also zu homologen Tangenten in den entsprechenden Punkten p und p' .

α). Wenn eine Gerade der einen Ebene sich so bewegt, dass sie eine Umhüllung U beschreibt, so muss die entsprechende Gerade der andern Ebene ebenfalls eine Umhüllung U' beschreiben,

denn wäre U' ein Strahlenbüschel, so müsste auch U ein Strahlenbüschel sein (§ 44 β). Dem Schnittpunkte zweier Erzeugenden von U entspricht der Schnittpunkt der entsprechenden Erzeugenden von U' . Wenn die beiden Erzeugenden von U in eine einzige G zusammenfallen und dadurch ihr Schnittpunkt in den Berührungspunkt von G übergeht, so fallen die entsprechenden Erzeugenden von U' in die entsprechende Gerade G' und ihr Schnittpunkt in den Berührungspunkt dieser Geraden.

b) Erklärung. Wenn man in dem Einen von zwei perspectivischen Systemen eine Figur gegeben denkt (Originalfigur), so entspricht derselben eine ganz bestimmte Figur (Abbildung) des andern Systems. Die bisherigen Sätze handeln von der Abhängigkeit dieser Figuren von einander. Die Ebenen der Originalfigur und der Abbildung werden auch als Originalebene und Bildebene unterschieden. Die Originalfigur und ihre Abbildung heissen auch perspectivische Figuren.

Der besondere Fall, wo die Träger der perspectivischen § 46. Systeme parallel sind.

a) Wenn die Originalebene mit der Bildebene parallel ist, so sind die perspectivischen Figuren ähnlich. Je zwei entsprechende Gerade sind parallel. Je zwei entsprechende Winkel sind gleich. Entsprechende Punktreihen sind ähnlich und entsprechende Strahlenbüschel sind congruent.

Beweis. Der Parallelismus entsprechender Geraden folgt aus dem stereometrischen Satze: Die Schnittlinien zweier paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene sind parallel. Die Gleichheit entsprechender Winkel ergibt sich aus dem stereometrischen Satze: Winkel, deren Schenkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, sind gleich und von gleichem Sinne. Hieraus schliesst man (I, § 80a) auf die Aehnlichkeit entsprechender Dreiecke, welche von gleichem Sinne sind, weil in ihnen je zwei entsprechende Winkel gleichen Sinnes sind, sowie auf die Aehnlichkeit der perspectivischen Figuren (I, § 86 α). Die Aehnlichkeit entsprechender Punktreihen folgt aus § 24 α und die Congruenz entsprechender Strahlenbüschel aus der Gleichheit der entsprechenden Winkel.

Die Träger der perspectivischen Systeme sind nicht parallel. § 47.

Wenn die Objectebene und die Bildebene sich in einer Geraden schneiden, so wird dieselbe die Axe der perspectivischen Projection oder Projectionssaxe genannt.

Die folgenden Sätze setzen diesen Fall voraus.

a) Jeder Punkt, welcher auf der Axe der perspectivischen Projection gelegen ist, stellt einen sich selbst entsprechenden Punkt der beiden perspectivischen Systeme dar. (§ 44a.)

b) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei perspectivischen Systemen gehen durch den Projectionsmittelpunkt.

α) Die Axe der perspectivischen Projection stellt eine sich selbst entsprechende Gerade der beiden perspectivischen Systeme dar. (§ 44 α .)

β) Je zwei entsprechende Gerade zweier perspectivischer Systeme schneiden sich auf der Axe oder sind mit der Axe parallel.

Der Satz b) folgt direct aus der Definition entsprechender Punkte (§ 44a) und ist nur des dualistischen Entsprechens wegen hier aufgeführt. Um β) zu beweisen bemerke man, dass je zwei entsprechende Gerade der perspectivischen Systeme Schnittlinien von einer durch das Projectionscentrum gehenden Ebene mit den Ebenen jener Systeme sind (§ 44 α). Die Axe ist die Schnittlinie der Projectionsebenen selbst. Die Behauptung folgt daher aus dem Satze: Wenn drei Ebenen einander in drei Linien schneiden, so convergiren diese Linien nach einem Punkte oder sie sind einander parallel.

§ 48. Die Gegenaxen zweier perspectivischer Systeme.

a) Aufgabe. Diejenigen Punkte des Systems A zu bestimmen, welche unendlich fernen Punkten der Ebene A' entsprechen.

α) Aufgabe. Diejenigen Punkte des Systems A' zu bestimmen, welche unendlich fernen Punkten in A entsprechen.

Auflösung. Ein unendlich ferner Punkt der Ebene A' wird aus m durch einen Strahl projicirt, welcher mit A' parallel ist.

Alle auf diese Weise erhaltenen Strahlen liegen in einer zu A' parallelen Ebene E^*), welche die Ebene A in einer Geraden G schneidet**). Jeder unendlich ferne Punkt von A' entspricht also einem auf G gelegenen Punkte von A und umgekehrt. Auf

*) Nach dem Satze: Alle Geraden, welche durch einen Punkt m parallel zu einer Ebene A' gezogen sind, liegen in einer zu A' parallelen Ebene.

**) Wenn die eine von zwei parallelen Ebenen von einer dritten geschnitten wird, so wird auch die andere geschnitten.

dieselbe Weise findet man in der Ebene A' eine andere Gerade G' , deren Punkte den unendlich fernen Punkten von A entsprechen.

b) Erklärung. In jedem von zwei perspectivischen Systemen heisst diejenige Gerade die Gegenaxe des Systems, deren Punkte den unendlich fernen Punkten des andern Systems entsprechen.

Fortsetzung.

§ 49.

a) Einem Strahlenbüschel der Originalebene, dessen Scheitel auf der Gegenaxe G dieser Ebene gelegen ist, entspricht ein Büschel von Parallelstrahlen in der Bildebene. (§ 44 γ , § 48.)

b) Denjenigen Strahlen der Originalebene, welche mit der Gegenaxe G parallel sind, entsprechen Strahlen der Bildebene, welche mit der Gegenaxe G' parallel laufen.

α) Einem Büschel von Parallelstrahlen in der Originalebene entspricht ein Strahlenbüschel der Bildebene, welcher seinen Scheitel auf der Gegenaxe G' dieser Ebene hat. (§ 22b, § 44 γ , § 48.)

β) Denjenigen Strahlen der Bildebene, welche mit der Gegenaxe G' parallel sind, entsprechen Strahlen der Originalebene, welche mit der Gegenaxe G parallel laufen.

Beweis zu b) und β). Die Behauptung b) folgt aus a) und α), wenn man den Scheitel des Strahlenbüschels in den unendlich fernen Punkt der Gegenaxe G verlegt. Die Behauptung β) folgt aus α), wenn man den Parallelstrahlen des Büschels die Richtung der Gegenaxe G' gibt. Beide Behauptungen sind übrigens identisch.

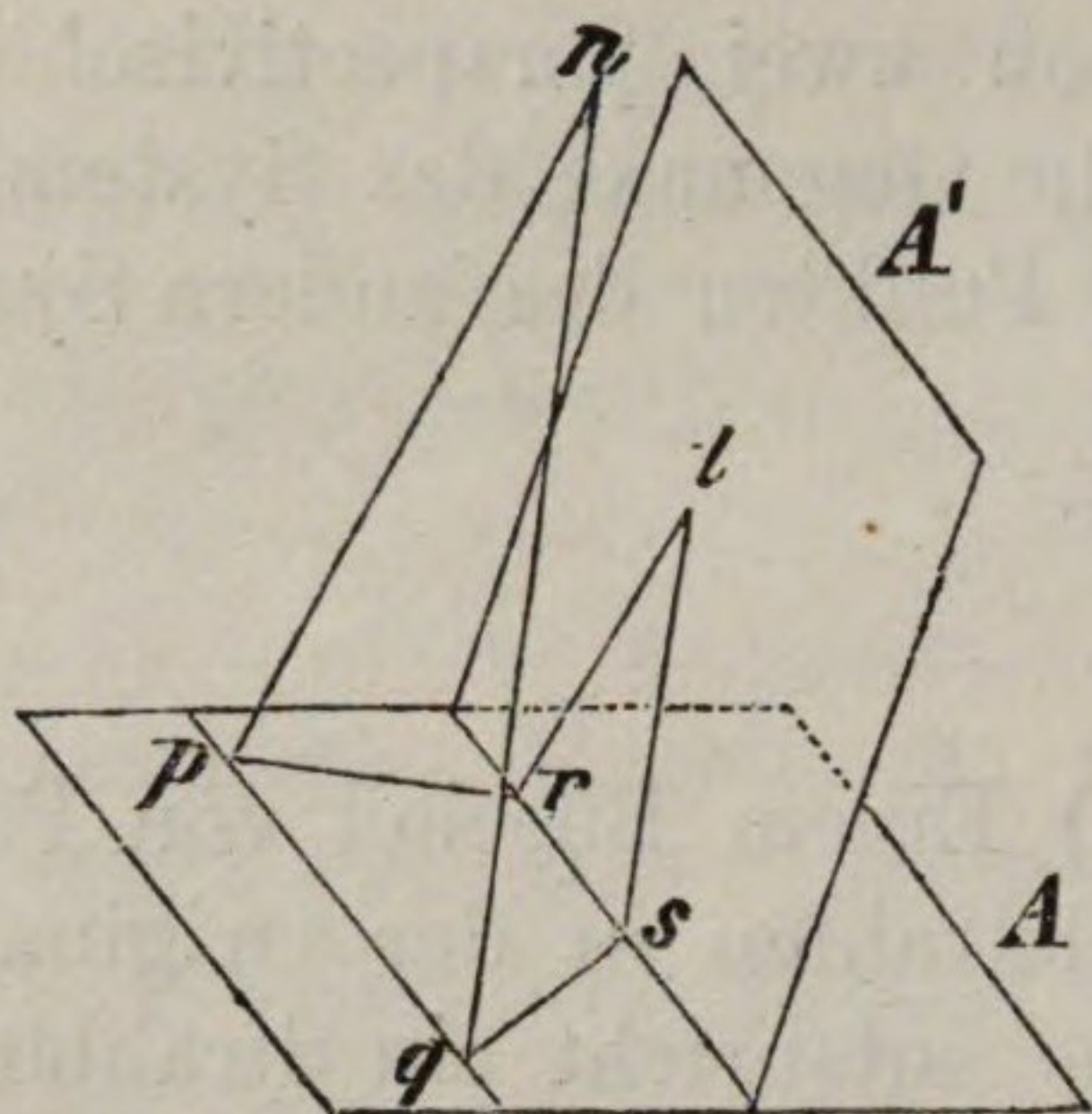
c) Wenn Tangenten an eine Curve der Originalebene sich auf der Gegenaxe G schneiden, so sind die entsprechenden Geraden der Bildebene parallele Tangenten der homologen Curve. (a und § 45a.)

γ) Wenn Tangenten an eine Curve der Originalebene unter sich parallel sind, so stellen die entsprechenden Geraden der Bildebene Tangenten an die homologe Curve dar, welche sich auf der Gegenaxe G' schneiden. (α und § 45a.)

d) Wenn die Punkte $p, q \dots$ (Fig. 50) die Schnittpunkte von Geraden pr und qs der Originalebene mit der Gegenaxe dieser Ebene sind, so sind die Abbildungen dieser Geraden mit den Projectionsstrahlen $mp, mq \dots$ der Punkte $p, q \dots$ parallel.

Beweis. Die Ebene mpq ist mit der Bildebene A' parallel,

Fig. 50.



weil sie die Gegenaxe pq der Originalebene A enthält. Diejenige Ebene mpr , welche die Gerade pr der Originalebene und ihre Abbildung $r't$ enthält, hat mit der Ebene mpq die Gerade mp und mit der Ebene A' die Abbildung $r't$ gemein. Die Behauptung folgt also aus dem Parallelismus der Ebenen mpq und A' nach dem Satze: Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind ihre Durchschnitte parallel.

e) Zusatz. Die Abbildungen zweier Geraden der Originalebene, welche die Gegenaxe G in p und q treffen, bilden einen Winkel, welcher dem Winkel pmq der Projektionsstrahlen mp und mq gleich ist.

§ 50.

Uebungen.

1) Welche besonderen Eigenschaften haben perspectivische Figuren, wenn ihre Träger sich schneiden, ihre Projektionsstrahlen aber parallel sind (der Projektionsmittelpunkt unendlich fern ist)?

Andeutung. Zwei homologe Punktreihen sind ähnlich und je zwei entsprechende Strecken derselben bilden das gleiche Verhältniss. Der Werth dieses Verhältnisses ändert sich jedoch von einem Paare entsprechender Geraden zu dem andern. Entsprechende Winkel sind im Allgemeinen nicht gleich (Affine Figuren).

2) Wie muss die gemeinsame Richtung der Projektionsstrahlen gewählt werden, wenn die Figuren in 1) congruent sein sollen (zwei Auflösungen).

3) Perspectivische Figuren auf parallelen Trägern sind ähnlich (§ 46a). Wo muss der Projektionsmittelpunkt liegen, wenn diese Aehnlichkeit in Congruenz übergehen soll (zwei Auflösungen)?

4) Können zwei perspectivische Figuren congruent sein, wenn ihre Projektionsaxe und das Projektionscentrum im endlichen Raume liegen?

5) abc und $a'b'c'$ seien zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Dreiecke E und E' , deren Ecken und Seiten paarweise entsprechend gedacht werden. Man beweise die beiden Sätze:

α) Wenn je zwei entsprechende Seiten der Dreiecke, beziehungsweise ihre Verlängerungen, sich in einem Punkte der Schnittlinie von E und E' treffen, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt.

β) Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen, so treffen sich je zwei entsprechende Seiten in einem Punkte der Schnittlinie von E und E' .

Andeutung. Die beiden Dreiecke können als entsprechende Figuren perspectivischer Systeme betrachtet werden. Im Falle α) bestimmen die drei Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Seiten gelegt werden, den Projectionsmittelpunkt.

6) Wenn man die eine von zwei perspectivischen Figuren mit ihrem Träger um die Axe dreht, so gehen fortwährend die Projectionstrahlen durch einen Punkt, — die Figuren befinden sich fortwährend in perspectivischer Lage. (5.)

7) Die Behauptung in 6) gilt auch dann noch, wenn der eine Träger soweit gedreht worden ist, dass derselbe mit dem andern zusammenfällt. Der Projectionsmittelpunkt fällt alsdann in den gemeinschaftlichen Träger der beiden perspectivischen Figuren (§ 26, 10).

8) Wenn zwei perspectivische Figuren in derselben Ebene liegen, so fallen α) in dem Projectionsmittelpunkte zwei entsprechende Punkte zusammen (7). β) Ausser in dem Projectionsmittelpunkte und in den Punkten der Axe kann kein Punkt des einen Systems mit dem entsprechenden zusammenfallen.

Andeutung zu β). Sonst wären die Figuren congruent. Um dies zu beweisen, zeige man zunächst, dass je zwei entsprechende und concentrische Strahlenbüschel, welche ihren Scheitel in der Axe haben, sich decken müssten.

9) Wenn zwei perspectivische Systeme in derselben Ebene liegen, so entspricht jede durch das Projectionscentrum gezogene Gerade sich selbst.

10) Zwei perspectivische Systeme auf verschiedenen Trägern sind bestimmt, wenn diese Träger und zwei Paare entsprechender Punkte, welche in einer Ebene liegen, gegeben sind.

11) Zwei perspectivische Systeme auf derselben Ebene anzugeben, wenn eine Gerade G dieser Ebene die Projectionaxe sein soll und ausserdem der Projectionsmittelpunkt m , sowie zwei entsprechende Punkte a und a' auf einer durch m gehenden Geraden gegeben sind.

Andeutung. In dem Projectionsmittelpunkte fallen zwei entsprechende Punkte zusammen. Wenn man daher das eine System auf seinem Träger um die Axe dreht, so sind nach 10) zwei perspectivische Systeme bestimmt, welche die gesuchten sind. Durch Zurückdrehen des einen Trägers kommen dieselben in die verlangte Lage, in welcher m der Projectionsmittelpunkt ist (8 β).

12) In den perspectivischen Systemen von 11) zu jedem Punkte b des einen Systems den entsprechenden zu suchen.

Andeutung. Nach dem Schnittpunkte p der Axe und der Geraden ab ziehe man die Gerade $a'p$. Der Schnittpunkt von $a'p$ und bm ist der gesuchte Punkt b' .

13) In den perspectivischen Systemen von 11) zu jeder Geraden des einen Systems die entsprechende zu suchen (12).

14) Wenn zwei perspectivische Systeme in derselben Ebene liegen, so sind die Gegenaxen mit der Projectionaxe parallel und das Centrum ist von der einen Gegenaxe ebensoweit entfernt als die Projectionaxe von der andern (§ 26, 21 und § 48).

15) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch die

Richtung der Projectionsaxe und zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt; man soll den Projectionsmittelpunkt und die Axe finden.

16) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch den Projectionsmittelpunkt, ein Paar entsprechender Punkte auf einem Projectionsstrahle und ein Paar entsprechender Geraden bestimmt. Man soll die Projectionsaxe finden (§ 26, 6 β).

17) Zwei perspectivische Systeme derselben Ebene sind durch das Projectionscentrum und die beiden Gegenaxen bestimmt. Man soll die Projectionsaxe finden (14).

18) Zwei Kreise K und K' seien gegeben. Je zwei Punkte und je zwei Tangenten, welche in Beziehung auf einen Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise invers sind (I, § 104), stellen zugeordnete Elemente zweier perspectivischer Systeme dar. Der Aehnlichkeitspunkt ist das Projectionscentrum und die Potenzlinie der Kreise ist die Projectionsaxe beider Systeme.

19) In einer Ebene ist ein Kreis K und ein Punkt p gegeben. Durch p einen Kreis K' so zu ziehen, dass ein gegebener Punkt Aehnlichkeitspunkt und eine gegebene Gerade Potenzlinie der beiden Kreise ist.

20) Wenn bei zwei perspectivischen Systemen derselben Ebene die Gegenaxen in eine Gerade zusammenfallen, so halbirt diese den Abstand zwischen dem Centrum und der Projectionsaxe (14).

21) Wenn bei zwei perspectivischen Systemen derselben Ebene die Gegenaxen zusammenfallen, so bilden

α) die auf demselben Projectionsstrahle gelegenen Paare entsprechender Punkte eine involutorische Reihe und

β) die durch denselben Punkt der Projectionsaxe gezogenen Paare entsprechender Geraden einen involutorischen Strahlenbüschel.

Andeutung. α) folgt aus § 32 b. Um β) zu beweisen schneide man die Paare entsprechender Strahlen durch einen Projectionsstrahl und wende α) und § 27 α an.

22) Wenn zwei perspectivische Systeme S und S' die Eigenschaft 21) haben, so entsprechen sich

α) je zwei homologe Punkte auf doppelte Weise, das heisst, wenn dem Punkte a in S der Punkt a' in S' entspricht, so entspricht auch dem Punkte a' , als Punkt von S betrachtet, der Punkt a in S' (§ 30).

β) Auch je zwei homologe Gerade entsprechen sich doppelt (§ 30).

Anmerkung. Zwei perspectivische Figuren dieser Art bilden ein sogenanntes involutorisches System. Entsprechende Punkte oder Geraden werden auch zugeordnet genannt.

23) Ein involutorisches System ist durch das Projectionscentrum und die Projectionsaxe bestimmt.

Andeutung. Auf jedem Projectionsstrahle bilden der Schnittpunkt derselben mit der Axe und der Projectionsmittelpunkt die Doppelpunkte der in 21 α erwähnten involutorischen Reihe, welche hierdurch bestimmt ist.

24) In dem Falle 23) soll man

α) zu jedem Punkte den zugeordneten Punkt (§ 13 d) und

β) zu jeder Geraden die zugeordnete Gerade ziehen (§ 13 δ).

25) Das Centrum und die Axe eines involutorischen Systems zu bestimmen, wenn gegeben sind

- α) zwei Paare zugeordneter Punkte,
- β) zwei Paare zugeordneter Strahlen.

26) Wenn man in der Ebene eines Kreises einen Punkt p als Centrum und seine Polare P als Axe eines involutorischen Systemes annimmt, so sind

α) je zwei Schnittpunkte des Kreises mit einer durch p gezogenen Geraden zugeordnete Punkte (§ 36b),

β) je zwei Tangenten des Kreises, welche durch einen Punkt von P gezogen sind, zugeordnete Geraden (§ 36 β).

27) Einen Kreis so zu zeichnen, dass ein gegebener Punkt p Pol der Geraden P sein soll, wenn zugleich

- α) der Kreis durch einen Punkt m gehen soll,
- β) der Kreis eine gegebene Gerade berühren soll.

II. Abschnitt.

Kegelschnitte. — Identität derselben mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde.

Kegelschnitte.

§ 51.

Erklärung. Die Punkte eines Kreises werden aus einem Punkte, welcher nicht auf seiner Ebene gelegen ist, durch Strahlen projecirt, welche eine krumme Oberfläche bilden. Diese Oberfläche heisst ein Kreiskegel. Die Projectionsstrahlen der Kreispunkte heissen die Seiten des Kegels und der angenommene Projectionsmittelpunkt ist seine Spitze.

Jede Ebene, welche nicht durch die Spitze des Kegels geht, schneidet die Oberfläche desselben in einer krummen Linie, welche ein Kegelschnitt genannt wird.

Folgerungen.

a) Jede perspectivische Abbildung eines Kreises kann als Schnittfigur eines Kreiskegels mit einer Ebene, d. h. als Kegelschnitt betrachtet werden.	α) Jede Schnittfigur eines Kreiskegels mit einer Ebene (welche nicht durch die Spitze geht) d. h. jeder Kegelschnitt ist eine perspectivische Abbildung eines Kreises.
---	---

b) Ein Kegelschnitt theilt die Ebene in zwei Theile.

Aus den Punkten des einen (äusseren Raum) lassen sich	Diejenigen Geraden, welche ganz in dem äusseren Raume
--	--

zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen. Aus den Punkten des andern (innerer Raum) lassen sich keine Tangenten an den Kegelschnitt legen.

Von keinem Punkte aus lassen sich mehr als zwei Tangenten an einen Kreis legen. (§ 51 α , § 45 a.)

verlaufen, treffen den Kegelschnitt nicht. Diejenigen Geraden, welche in den innern Raum reichen, treffen den Kegelschnitt in zwei Punkten.

Keine Gerade kann den Kegelschnitt in mehr als zwei Punkten treffen. (§ 51 α , § 45 a.)

§ 52. Identität der Kegelschnitte mit den Erzeugnissen projectivischer Gebilde.

a) Die Punkte eines Kegelschnitts werden aus zwei beliebigen derselben durch projectivische Strahlenbüschel projectirt.

α) Die Tangenten eines Kegelschnitts schneiden zwei beliebige derselben in projectivischen Punktreihen.

Beweis. a) Ein Kegelschnitt ist die perspectivische Abbildung eines Kreises. Wenn $p', q', a', b', c' \dots$ Punkte des Kegelschnitts sind, so sind die Strahlenbüschel $p' (a', b', c' \dots)$ und $q' (a', b', c' \dots)$ mit den entsprechenden Strahlenbüscheln $p (a, b, c \dots)$ und $q (a, b, c \dots)$ der Originalfigur bezüglich projectivisch (§ 44 γ). Die beiden letztern Strahlenbüschel sind aber nach § 21 a unter einander projectivisch, weil die Punkte $p, q, a, b, c \dots$ der Annahme nach auf einem Kreise liegen. Man schliesst also aus § 18 a, dass die Punktreihen $p' (a', b', c' \dots)$ und $q' (a', b', c' \dots)$ ebenfalls projectivisch sind.

α) Man denke sich wiederum den gegebenen Kegelschnitt als die perspectivische Abbildung eines Kreises. Wenn die Tangenten P' und Q' des Kegelschnitts von den Tangenten $A', B', C' \dots$ bezüglich in den Punktreihen $a', b', c' \dots$ und $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ geschnitten werden, so sind diese Punktreihen mit den entsprechenden $a, b, c \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma \dots$ der Originalfigur projectivisch. Die Geraden P, Q der Originalfigur, welche von den Geraden $A, B, C \dots$ derselben in diesen Punktreihen geschnitten werden, sind aber nach § 45 a Tangenten eines Kreises. Die Punktreihen $a, b, c \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sind also nach § 21 α unter sich projectivisch. Man schliesst also aus § 18 a, dass auch die Punktreihen $a', b', c' \dots$, $\alpha', \beta', \gamma' \dots$ projectivisch sind.

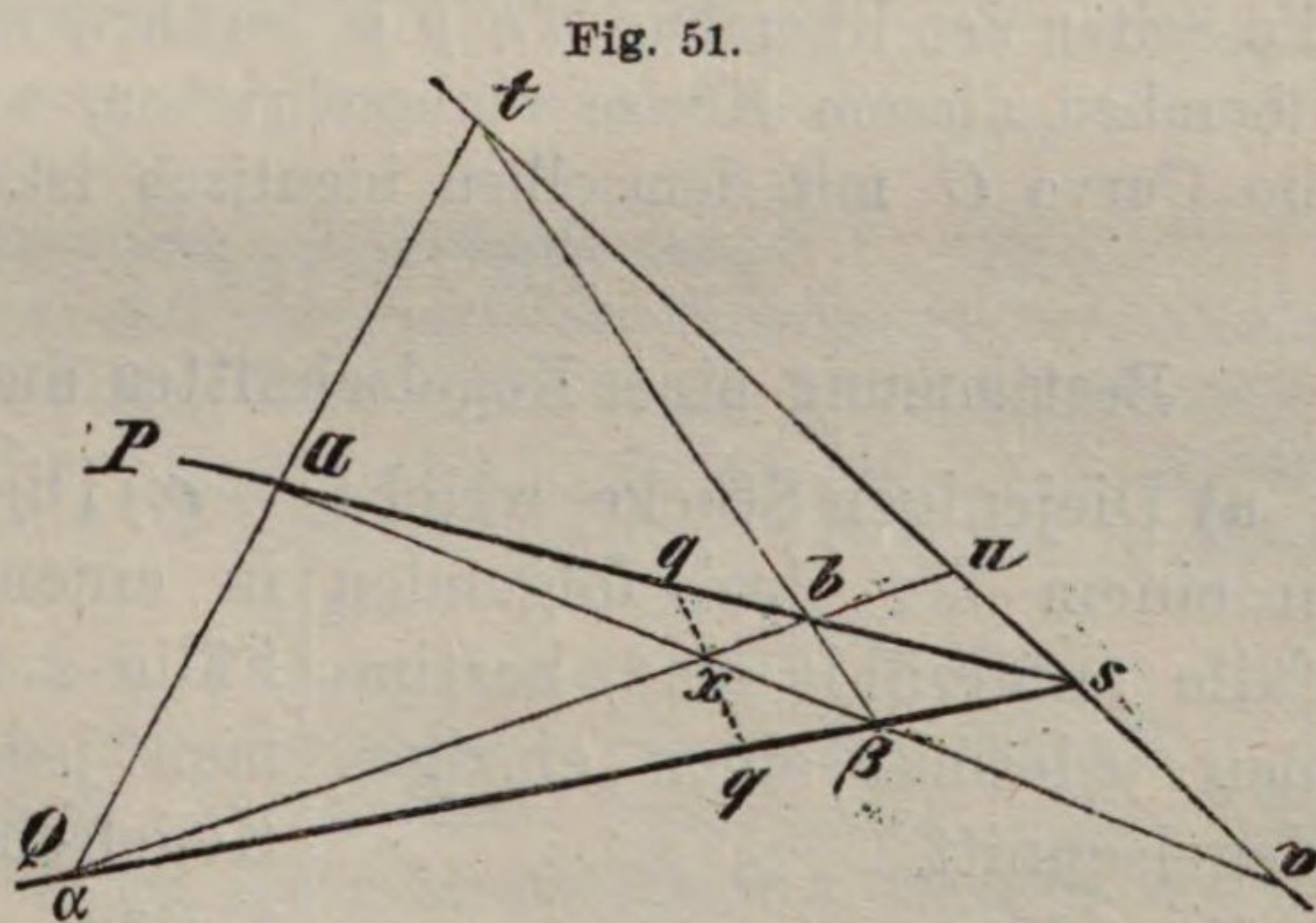
b) Jede Curve, welche das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel ist,

β) Jede Curve, welche das Erzeugniss projectivischer Punktreihen ist, kann als per-

kann als perspectivische Abbildung eines Kreises angesehen werden, das heisst, sie ist ein Kegelschnitt.

Beweis. b) Man ziehe in der Ebene A der gegebenen Curve C irgend eine Gerade G , welche die letztere nicht schneidet (§ 41 γ). Die beiden projectivischen Strahlenbüschel, welche die Curve C erzeugen und mit P und Q bezeichnet werden sollen, treffen diese Gerade in zwei projectivischen Punktreihen $a, b, c \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma \dots$, welche keine entsprechenden Punkte gemeinsam haben (§ 41 β). Man lege nun durch G eine weitere Ebene E und suche in derselben einen Punkt m , von welchem aus die projectivischen Punktreihen $a, b, c \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma \dots$ durch zwei congruente Strahlenbüschel (gleichen Sinnes) projecirt werden (§ 25 c). Von dem Punkte m als Projectionscentrum projecire man nun die Originalfigur der Ebene A auf eine zu E parallele Ebene A' . G wird dann die Gegenaxe der Originalfigur sein (§ 48). Nach § 49 d werden nun die Strahlenbüschel P und Q auf der Ebene A' durch zwei Strahlenbüschel P' und Q' abgebildet, welche mit den Strahlenbüscheln $m(a, b, c \dots)$ und $m(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ bezüglich congruent und von gleichem Sinne sind. Die Strahlenbüschel P' und Q' sind deshalb auch congruent und von gleichem Sinne und schneiden sich (Anmerkung zu § 21 a) auf einem Kreise, welcher die perspectivische Abbildung der Curve C ist.

β) Die Geraden P, Q einer Ebene A (Fig. 51) seien die Träger zweier projectivischer Punktreihen $a, b, c, d \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$, deren Projectionsstrahlen $a\alpha, b\beta, c\gamma \dots$ die gegebene Curve C einhüllen. p, q seien diejenigen Punkte, welche dem



Schnittpunkte s der Träger in beiden Punktreihen entsprechen. Man wähle auf der Geraden pq einen Punkt x , durch welchen keine Tangenten an die Curve C gelegt werden können (§ 41 c). Die beiden projectivischen Punktreihen auf P und Q werden nach § 38 c aus dem Punkte x durch einen involutorischen Strahlenbüschel ohne Doppelstrahlen projecirt. Je zwei zugeordnete Strahlen $a\beta$ und

ab sind die Diagonalen eines der Curve C umbeschriebenen Vierecks $a\alpha\beta b$. Von diesem involutorischen Strahlenbüschel wird die Gerade G , welche den Schnittpunkt s von P und Q mit dem Schnittpunkte t von $a\alpha$ und $b\beta$ verbindet, in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, welche keine Doppelpunkte hat. Durch G lege man nun eine Ebene E und bestimme in derselben einen Punkt m , aus welchem die Punktepaare der involutorischen Reihe unter rechten Winkeln projicirt werden (Anmerkung zu § 28). Aus m projicire man die Originalfigur der Ebene A auf eine mit E parallele Ebene A' . G ist alsdann die Gegenaxe der Originalfigur (§ 48). Der involutorische Strahlenbüschel x wird als ein involutorischer Strahlenbüschel x' abgebildet, in welchem je zwei zugeordnete Strahlen senkrecht auf einander stehen (§ 44e, § 49d).

Die Abbildung $a'\alpha'\beta'b'$ des Vierecks $a\alpha\beta b$ ist also ein Viereck, in welchem die Diagonalen $a'\beta'$ und $\alpha'b'$ als zugeordnete Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels x' senkrecht auf einander stehen. Da ausserdem die gegenüberliegenden Seiten dieses Vierecks $a'\alpha'\beta'b'$ nach § 49a parallel sind, so muss dasselbe ein Rhombus sein. Auf dieselbe Weise führt jedes andere Paar zugeordneter Strahlen in dem involutorischen Büschel x' zu einem Rhombus. Diese Rhomben sind alle der Abbildung C' von der gegebenen Curve C umbeschrieben; sie haben ferner ihren Mittelpunkt in dem Punkte x' und zwei gegenüberliegende Seiten liegen in den Abbildungen $a'b'$ und $\alpha'\beta'$ der Träger ab und $\alpha\beta$.

Denkt man sich daher denjenigen Kreis coustruirt, welcher die Seiten des Rhombus $a'\alpha'\beta'b'$ berührt, so sind auch alle andern Rhomben diesem Kreise umbeschrieben, woraus sich ergibt, dass die Curve C mit demselben identisch ist.

§ 53. Bestimmung eines Kegelschnittes durch fünf Bedingungen.

a) Diejenigen Stücke, welche in einem der drei folgenden Fälle aufgezählt sind, bestimmen jedesmal einen einzigen Kegelschnitt.

1) Fünf Tangenten.

2) Vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben.

α) Diejenigen Stücke, welche in einem der drei folgenden Fälle aufgezählt sind, bestimmen jedesmal einen einzigen Kegelschnitt.

1) Fünf Punkte des Kegelschnitts.

2) Vier Punkte und die Tangente in einem derselben.

3) Drei Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben.

3) Drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben.

Beweise.

Da die Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen sollen, Erzeugnisse projectivischer Punktreihen sind (§ 52 α), so folgt die Behauptung aus § 41 α und Anmerkung.

Da die Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen sollen, Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel sind (§ 52 α), so folgt die Behauptung aus § 41 α und Anmerkung.

Uebungen.

§ 54.

1) In welchem Falle wird das Erzeugniss projectivischer Strahlenbüschel, welches im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist, durch die Punkte zweier geraden Linien dargestellt?

2) In welchem Falle wird das Erzeugniss projectivischer Punktreihen, welches im Allgemeinen ein Kegelschnitt ist, durch diejenigen Geraden dargestellt, welche durch einen von zwei Punkten gehen?

3) Wenn eine Curve das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlenbüschel ist, so werden zwei beliebige ihrer Tangenten von den übrigen Tangenten der Curve in den entsprechenden Punkten zweier projectivischer Punktreihen geschnitten (§ 52 β und α).

4) Wenn eine Curve das Erzeugniss zweier projectivischer Punktreihen ist, so werden die Punkte derselben aus zwei beliebigen Punkten der Curve durch zwei projectivische Strahlenbüschel projectirt (§ 52 β und α).

5) Wenn man durch einen Punkt eines Kegelschnitts 4 harmonische Strahlen zieht, so bestimmen dieselben auf dem Kegelschnitt 4 Punkte, welche durch ihre Verbindung mit jedem weiteren Curvenpunkte 4 harmonische Strahlen liefern.

6) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

7) Zwei projectivische und concentrische Strahlenbüschel, deren gemeinsamer Scheitel auf einem Kegelschnitt liegt, bestimmen Punktepaare des Kegelschnitts, welche aus jedem Curvenpunkte durch die entsprechenden Strahlen zweier projectivischer Strahlenbüschel projectirt werden.

8) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

9) Ein involutorischer Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf dem Kegelschnitt liegt, bestimmt auf der Curve Punktepaare, welche aus jedem Punkte derselben durch einen involutorischen Strahlenbüschel projectirt werden.

10) Wie heisst der dualistisch zugeordnete Satz?

11) Wenn man auf einer Geraden die Schnittpunkte mit einem Kegelschnitt und die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Vierecks bestimmt, so erhält man 4 Punktepaare einer involutorischen Reihe.

Andeutung. m, n seien die Schnittpunkte einer Geraden G mit dem Kegelschnitt K und $a, a'; b, b'; c, c'$ die drei Paare von Schnittpunkten der Geraden G mit den Gegenseiten eines einbeschriebenen vollständigen Vierecks. Man wähle eine der Viereckseiten, welche durch die Punkte a, a' gehen. Die auf dieser Seite liegenden beiden Eckpunkte des Vierecks und die Punkte m, n projicire man nach einander aus den beiden noch übrigen Ecken auf die Gerade G , wodurch man findet, dass die Punktgruppen m, n, c, b' und m, n, b, c' projectivisch sind (§ 52a, § 16 α , § 18a).

Nach § 33, 1 sind aber auch m, n, c, b' und n, m, b', c projectivisch, woraus die Projectivität von m, n, b, c' und n, m, b', c folgt. Nunmehr ergibt sich die Behauptung aus § 30 b.

12) Man soll den dualistisch zugeordneten Satz aussprechen und beweisen.

13) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher durch 4 Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt (zwei Auflösungen).

Andeutung. Die Kegelschnitte, welche durch 4 Punkte gehen, erzeugen auf der gegebenen Geraden eine involutorische Punktreihe (11). Die etwa vorhandenen Doppelpunkte der Reihe sind Berührungspunkte von Kegelschnitten, welche die gegebene Bedingung erfüllen.

14) Wieviele von denjenigen Kegelschnitten, welche durch 4 gegebene Punkte gehen, zerfallen in zwei Gerade (1)?

15) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher durch drei Punkte a, b, c geht, in c die Gerade C und ausserdem eine Gerade G berührt, welche durch keinen der gegebenen Punkte geht (zwei Auflösungen).

Andeutung. Ein specieller Fall von 13), in welchem zwei der gegebenen Punkte unendlich nahe liegen. Die Linienpaare ab und C , ac und bc bestimmen auf G die in Betracht kommende involutorische Reihe.

16) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher 4 gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (zwei Auflösungen).

17) Wieviele derjenigen Kegelschnitte, welche 4 gegebene Gerade berühren, zerfallen in zwei Punkte (2)?

18) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher drei Gerade A, B, C zu Tangenten hat, wenn ausserdem a der Berührungspunkt von A ist und die Curve durch einen weitem Punkt m gehen soll, welcher auf keiner der 3 gegebenen Geraden liegt (zwei Auflösungen).

19) Wenn in einer Ebene zwei perspectivische Figuren liegen (§ 45 b), so entspricht

α) einer durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugten Curve (§ 40) der einen Figur eine ebensolche Figur in der andern,

β) einer durch zwei projectivische Punktreihen erzeugten Curve (§ 40) der einen Figur eine ebensolche Curve der andern.

20) Wenn in derselben Ebene zwei perspectivische Systeme liegen, so entsprechen den Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts der einen Figur die Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts der andern.

21) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Curven perspectivischer Systeme sind, so liegen auf

α) homologen Geraden gleichzeitig zwei Punkte von K und K' oder ein solcher oder keiner und es gehen

β) durch homologe Punkte gleichzeitig zwei Tangenten von K und K' oder eine solche oder keine.

22) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Curven perspectivischer Systeme sind, so sind

α) die Schnittpunkte a und b von K mit der Projectionsaxe gemeinschaftliche Punkte von K und K' und

β) die von dem Projectionsmittelpunkt an K gezogenen Tangenten A und B sind gemeinschaftliche Tangenten von K und K' .

γ) Die gemeinschaftliche Sehne ab hat gegen K und K' gleichartige Lage, d. h. von jedem Punkte derselben können entweder an beide Kegelschnitte oder an keinen derselben Tangenten gezogen werden (21).

δ) Der durch A und B gebildete gemeinschaftliche Tangentenwinkel hat gegen K und K' gleichartige Lage, d. h. jede durch den Schnittpunkt von A und B gezogene Gerade trifft entweder beide Kegelschnitte oder keinen derselben (21).

Vierter Cursus.

Eigenschaften der Kegelschnitte. Identität derselben mit den Curven des ersten Cursus.

I. Abschnitt.

Figuren, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben oder umbeschrieben sind.

Sätze von Pascal und Brianchon.

§ 55.

a) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, schneiden sich die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte. (Satz des Brianchon.)

α) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, liegen die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden. (Satz des Pascal.)

Beweise.

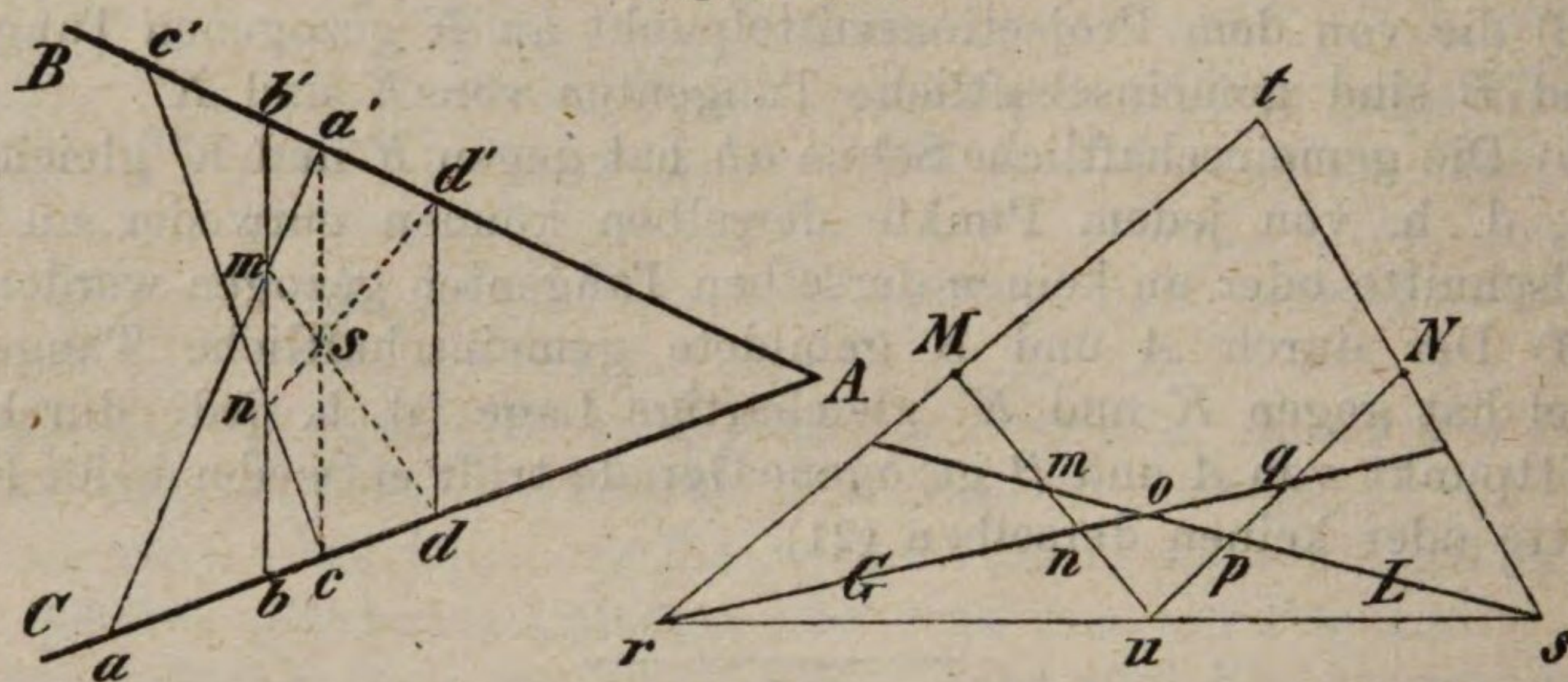
Die Seiten eines solchen Sechsecks sind Tangenten an den Kegelschnitt. Vier derselben aa' , bb' , cc' , dd' (Fig. 52) schneiden die beiden übrigen AC und AB in entsprechenden Punkten zweier

Die Eckpunkte eines solchen Sechsecks sind Punkte des Kegelschnitts. Vier derselben q , o , m , t (Fig. 53) werden aus den beiden übrigen M und N durch entsprechende Strahlen zweier

projectivischer Punktreihen. Nach der Anmerkung zu § 37a schneiden sich in dem Sechseck $nm a' d' d c$ und in allen Sechsecken, welche hieraus durch Vertauschung der Projektionsstrahlen unter einander

projectivischer Strahlenbüschel projicirt. Nach der Anmerkung zu § 37a liegen in dem Sechseck $MtNqom$ und in allen Sechsecken, welche hieraus durch Vertauschung der Punkte q, o, m, t

Fig. 52 u. 53.



entstehen, die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte.

Nach § 52a kann man aber auch die Tangenten AC und AB mit den übrigen vertauschen, so dass alle Sechsecke, welche die gegebenen Tangenten zu Seiten haben, die angegebene Eigenschaft besitzen.

b) In jedem Fünfeck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, geht die Verbindungslinie eines Eckpunktes mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, welche die übrigen Eckpunkte verbinden.

unter einander entstehen, die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden.

Nach § 52a kann man aber auch die Punkte M und N mit den übrigen vertauschen, so dass alle Sechsecke, welche die gegebenen Punkte zu Ecken haben, die angegebene Eigenschaft besitzen.

β) In jedem Fünfeck, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, liegt der Schnittpunkt einer Seite mit der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes auf einer Geraden mit den Schnittpunkten von je zwei andern nicht einander anliegenden Fünfeckseiten.

Beweise.

Man kann den Beweis durch die Anmerkung zu § 38a und § 52a führen. Wenn man sich jedoch vorstellt, dass in einem

Man kann den Beweis durch die Anmerkung zu § 38a und § 52a führen. Wenn man sich jedoch vorstellt, dass in einem

dem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck zwei auf einanderfolgende Seiten in eine Tangente zusammenfallen und somit das durch ihren Schnittpunkt gebildete Eck in den Berührungspunkt jener Tangente fällt (§ 39a), so folgt der Satz unmittelbar aus a).

c) In jedem Viereck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, gehen diejenigen Geraden, welche die Berührungspunkte gegenüberliegender Seiten verbinden, durch den Schnittpunkt der Diagonalen.

dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseck zwei auf einanderfolgende Ecken in einen Punkt zusammenfallen und somit die zwischen denselben liegende Seite zur Tangente in jenem Punkte wird (§ 39a), so folgt der Satz unmittelbar aus α).

γ) In jedem Viereck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, schneiden sich die Tangenten gegenüberliegender Eckpunkte auf derjenigen Geraden, welche durch die beiden Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten bestimmt sind.

Beweise.

Man kann diesen Satz durch die Anmerkung zu § 38b und § 52 α beweisen. Derselbe ergibt sich jedoch unmittelbar aus b), wenn man zwei aufeinanderfolgende Seiten des Fünfecks in dieselbe Tangente des Kegelschnitts zusammenfallen lässt.

d) In jedem Dreieck, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, schneiden sich die Geraden, welche die Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem Punkte.

Der Beweis ergibt sich aus a), wenn man drei mal je zwei aufeinanderfolgende Seiten des Sechsecks in dieselbe Tangente des Kegelschnitts zusammenfallen lässt. Drei Ecken des Sechsecks gehen alsdann in die Eckpunkte

Man kann diesen Satz durch die Anmerkung zu § 38 β und § 52a beweisen. Derselbe ergibt sich jedoch unmittelbar aus β), wenn man zwei aufeinanderfolgende Ecken in denselben Punkt des Kegelschnitts zusammenfallen lässt.

δ) In jedem Dreieck, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, liegen die Punkte, in welchen die Seiten des Dreiecks von den Tangenten der gegenüberliegenden Ecken geschnitten werden, auf einer Geraden

Der Beweis ergibt sich aus α), wenn man drei mal je zwei aufeinanderfolgende Ecken des Sechsecks in denselben Punkt des Kegelschnitts zusammenfallen lässt. Drei Seiten des Sechsecks gehen alsdann in die Seiten des

des durch diese Tangenten gebildeten Dreiecks über, während die übrigen Ecken in die Berührungspunkte der Dreieckseiten mit dem Kegelschnitt fallen.

durch diese Punkte gebildeten Dreiecks über, während die übrigen Seiten in die Tangenten des Kegelschnitts an die Ecken des Dreiecks fallen,

§ 56. Aufgaben.

a) Auf der einen von 5 Tangenten, welche einen Kegelschnitt bestimmen, ist ein Punkt gegeben. Man soll die zweite Tangente finden, welche durch diesen Punkt geht.

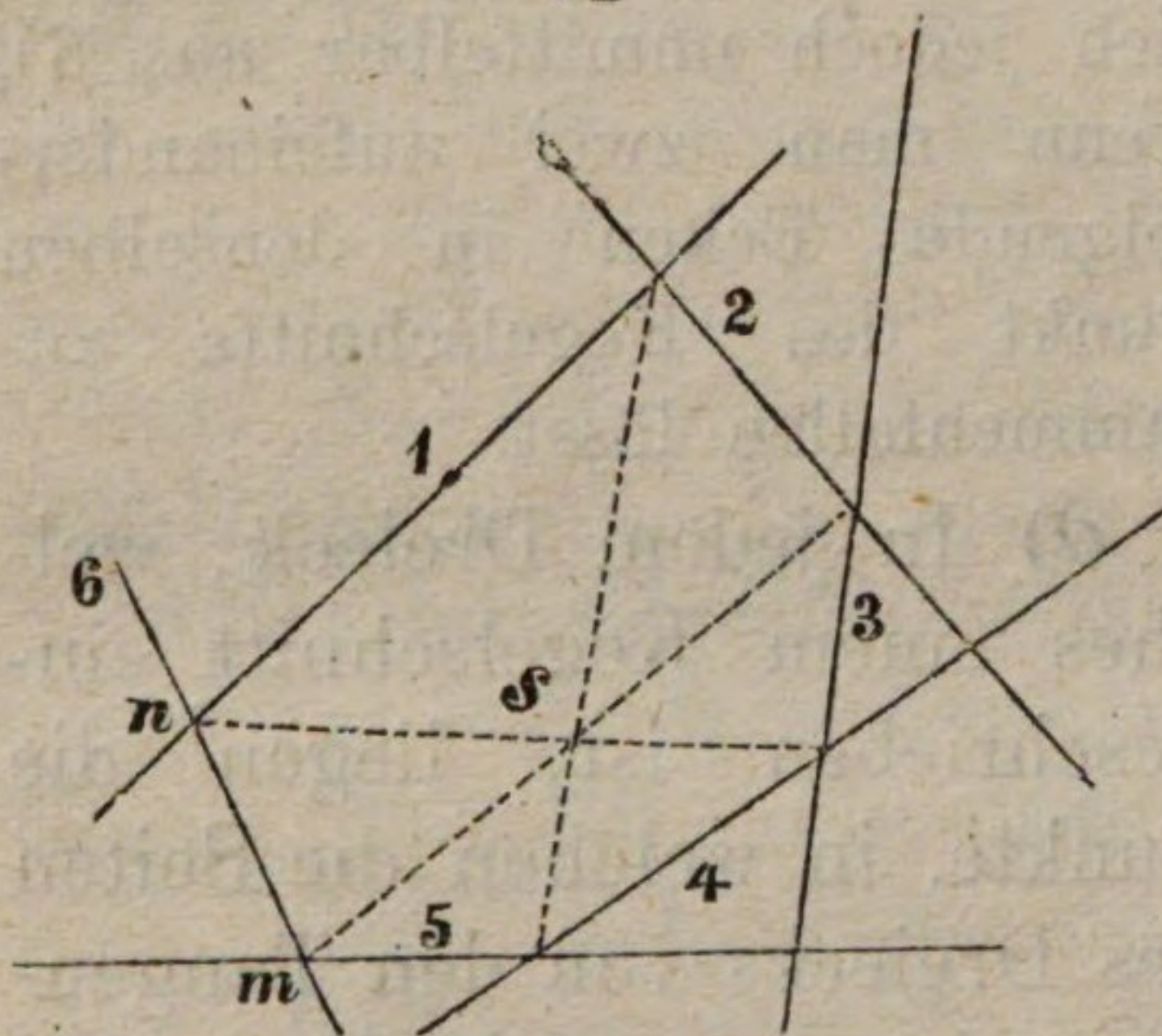
α) Durch den einen von 5 Punkten, welche einen Kegelschnitt bestimmen, ist eine Gerade gezogen. Man soll ihren zweiten Schnittpunkt mit der Curve finden.

Auflösungen.

a) (Fig. 54.) Es seien die Tangenten 1, 2 ... 5 gegeben und auf der letzten derselben ein Punkt m , durch welchen noch eine 6te Tangente an die Curve

α) (Fig. 55.) Es seien die Punkte 1, 2, ... 5 gegeben und durch den letzten derselben eine Gerade (5, n) gezogen, auf der ein 6ter Curvenpunkt gesucht

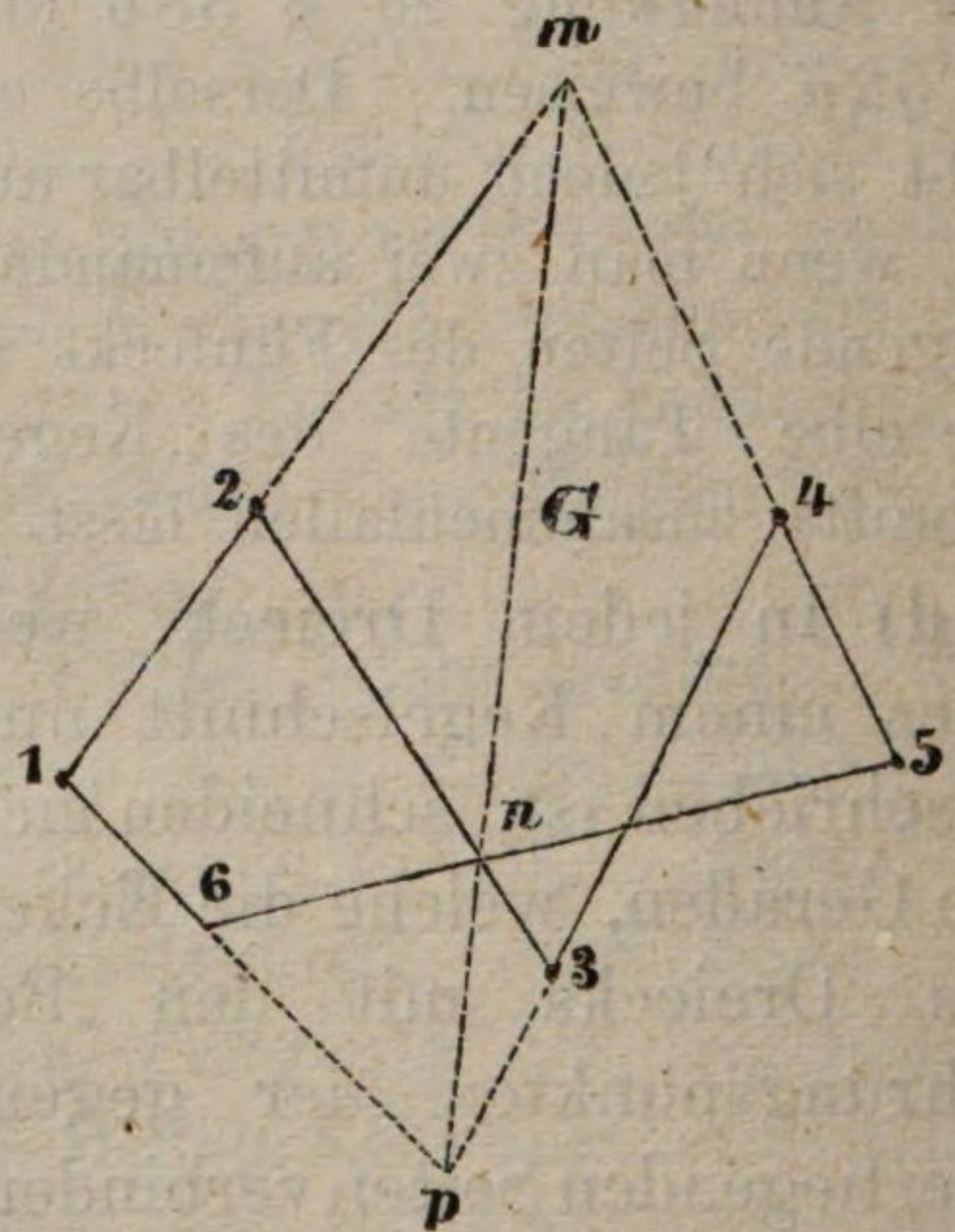
Fig. 54.



gelegt werden soll. Die Tangenten bilden in dieser Aufeinanderfolge die Seiten eines umbeschriebenen Sechsecks. Die gegenüberliegenden Ecken (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und m bestimmen durch ihre Verbindungs-
linien den Punkt s . Der 6te

werden soll. Die 6 Punkte bilden in dieser Aufeinanderfolge die Ecken eines eingeschriebenen 6 Ecks. Die gegenüberliegenden Seiten (1, 2) und (4, 5), (2, 3) und (5, n) bestimmen durch ihre Schnittpunkte eine Gerade G . Der Schnittpunkt der Seite (3, 4)

Fig. 55.



Eckpunkt des umbeschriebenen 6 Ecks muss auf derjenigen Geraden liegen, welche s mit dem Schnittpunkt $(3,4)$ verbindet. Hiermit ist die zweite durch m gehende Tangente mn gefunden.

b) Ein Kegelschnitt sei durch 5 Tangenten bestimmt; man soll auf einer dieser Tangenten den Berührungspunkt finden (§ 55 b).

c) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben bestimmt (§ 53 a). Auf einer dieser Tangenten sei ein Punkt gegeben, durch welchen die zweite Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden soll (§ 55 b).

d) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Tangenten und den Berührungspunkt auf einer derselben bestimmt. Man soll auf einer der übrigen Tangenten den Berührungspunkt finden (§ 55 c).

e) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien derselben bestimmt. Auf einer dieser letzteren Tangenten sei ein Punkt gegeben, durch welchen die zweite Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden soll (§ 55 c).

1) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Tangenten und die Berührungspunkte auf zweien der-

mit der 6ten Seite des 6-Ecks muss auf der Geraden G liegen. $(p,1)$ ist also diese 6te Seite und ihr Schnittpunkt mit der durch 5 gezogenen Geraden der gesuchte Punkt des Kegelschnitts.

β) Ein Kegelschnitt sei durch 5 Punkte bestimmt; man soll in einem dieser Punkte die Tangente an den Kegelschnitt ziehen (§ 55 β).

γ) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmt (§ 53 α). Durch einen dieser Punkte sei eine Gerade gezogen, auf welcher der zweite Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (§ 55 β).

δ) Ein Kegelschnitt sei durch 4 Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmt. Man soll in einem der übrigen Punkte die Tangente an die Curve ziehen (§ 55 γ).

ϵ) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben bestimmt. Durch einen dieser letzteren Punkte ist eine Gerade gezogen, auf welcher der zweite Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (§ 55 γ).

2) Ein Kegelschnitt sei durch 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben

selben bestimmt. Man soll | bestimmt. Man soll in dem
auf der dritten Tangente den | dritten Punkte die Tangente
Berührungspunkt finden (§ 55d). | an die Curve ziehen (§ 55δ).

II. Abschnitt.

Pol und Polare.

§ 57. Pol und Polare.

a) Ein Punkt und eine Gerade heissen Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn die entsprechenden Elemente der Originalfigur Pol und Polare in Bezug auf denjenigen Kreis sind, dessen perspectivische Abbildung der gegebene Kegelschnitt darstellt (§ 34 a und α , § 51 α).

Wenn der Punkt p der Pol der Geraden P ist, so ist P die Polare von p .	Wenn die Gerade P die Po- lare von p ist, so ist p der Pol von P .
---	--

b) Die Sätze in § 34 b und β , so wie die Sätze, Definitionen und Auflösungen von Aufgaben in § 35 und 36, welche an dem angeführten Orte für die Kreislinie bewiesen sind, gelten auch für jeden Kegelschnitt.

Beweis. Man zeige, dass die von jenen Sätzen aufgestellten Eigenschaften der Figuren projectivisch sind, das heisst, dass aus ihrer Gültigkeit für eine bestimmte Figur auch ihre Gültigkeit für jede perspectivische Abbildung jener Originalfigur folgt. Der Beweis dieser Behauptung ist unter Benutzung von § 44 und 45 und der Definition in § 57 a in jedem Falle sehr leicht. Als- dann folgt aber unmittelbar, dass jene Sätze auch für einen beliebigen Kegelschnitt Geltung haben, denn ein solcher kann als perspectivische Abbildung eines Kreises angesehen werden.

§ 58. Reciproke Figuren.

Zu jeder Figur in der Ebene des Kegelschnitts C kann man mit Hülfe des letztern eine andere Figur construiren, welche der gegebenen Figur reciprok genannt wird und von ihr in folgender Weise abhängt.

a) Jedem Punkte der ersten Figur entspricht eine Gerade der zweiten Figur, nämlich	α) Jeder Geraden der ersten Figur entspricht ein Punkt der zweiten Figur, nämlich ihr
--	---

seine Polare in Bezug auf den Kegelschnitt C . | Pol in Bezug auf den Kegelschnitt.

Ueber den Zusammenhang beider Figuren ergeben sich aus dem Früheren folgende Gesetze.

b) Wenn Punkte der einen Figur auf einer Geraden P liegen, so gehen die entsprechenden Geraden der andern Figur durch den der Geraden P homologen Punkt p (den Pol von P).

c) Einer Punktreihe der einen Figur entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel der andern.

Der Träger der Punktreihe und der Scheitel des Büschels sind entsprechende Elemente.

β) Wenn Gerade der einen Figur durch einen Punkt p gehen, so liegen die entsprechenden Punkte der andern Figur auf der dem Punkte p entsprechenden Geraden P (der Polaren von p).

γ) Einem Strahlenbüschel der einen Figur entspricht eine projectivische Punktreihe der andern.

Der Scheitel des Strahlenbüschels und der Träger der Punktreihe sind entsprechende Elemente.

Beweis.

Die Punkte der gegebenen Punktreihe und die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden mit dem Träger der Reihe sind einander conjugirt und bilden eine involutorische Reihe (§ 57b, § 35a). Die Behauptung folgt also aus § 30a, § 16a und § 18a.

Die Strahlen des gegebenen Strahlenbüschels und die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte mit dem Scheitel des Büschels sind einander conjugirt und bilden einen involutorischen Strahlenbüschel (§ 57a, § 36a). Die Behauptung folgt also aus § 30a, § 16a und § 18a.

Fortsetzung.

a) Den Punkten eines Kegelschnitts der einen Figur entsprechen die Tangenten eines Kegelschnitts der andern Figur.

α) Den Tangenten eines Kegelschnitts der einen Figur entsprechen die Punkte eines Kegelschnitts der andern Figur.

§ 59.

Beweis.

Ein Kegelschnitt C der ersten Figur kann durch zwei projectivische Strahlenbüschel S und

Ein Kegelschnitt der ersten Figur kann durch zwei projectivische Punktreihen erzeugt

S' erzeugt werden. Den Strahlenbüscheln S und S' entsprechen in der andern Figur zwei Punktreihen P und P' welche ebenfalls unter sich projectivisch sind (§ 58 γ , § 18a). Den Schnittpunkten entsprechender Strahlen von S und S' sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte von P und P' homolog. Die Behauptung folgt daher aus § 52 β .

b) Den Punkten des Kegelschnitts C in der einen Figur entsprechen die Tangenten desselben Kegelschnitts in der andern Figur (§ 57b, § 34b).

c) Vier Tangenten A, B, C, D eines Kegelschnitts bestimmen ein vollständiges Vierseit und ihre Berührungspunkte a, b, c, d , ein vollständiges Viereck. Je zwei Diagonalen des ersteren schneiden sich in einem Nebeneck des letzteren.

werden. Den Punktreihen P und P' entsprechen in der andern Figur zwei Strahlenbüschel S und S' , welche ebenfalls unter sich projectivisch sind (§ 58c, § 18a). Den Verbindungslinien von P und P' sind die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von S und S' homolog. Die Behauptung folgt daher aus § 52b.

β) Den Tangenten des Kegelschnitts C in der einen Figur entsprechen die Punkte desselben Kegelschnitts in der andern Figur (§ 57b, § 34 β).

γ) Vier Punkte a, b, c, d eines Kegelschnitts bestimmen ein vollständiges Viereck und ihre Tangenten A, B, C, D , ein vollständiges Vierseit. Je zwei Nebenecken des erstern liegen auf einer Diagonale des letzteren.

Beweise.

Das vollständige Vierseit A, B, C, D und das vollständige Viereck a, b, c, d sind reciproke Figuren. Die Nebenecken des Letzteren entsprechen den Diagonalen des Ersteren, sind also die Pole dieser Diagonalen. Die Behauptung folgt deshalb direct aus § 57b, § 36c.

Das vollständige Viereck a, b, c, d und das vollständige Vierseit A, B, C, D sind reciproke Figuren. Die Diagonalen des Letzteren entsprechen den Nebenecken des Ersteren, sind also die Polaren dieser Nebenecken. Die Behauptung folgt also direct aus § 57b, § 36 γ .

§ 60.

Uebungen.

1) Wenn die Diagonalen eines einbeschriebenen (einfachen) Vierecks sich in dem Punkte n (Fig. 39) schneiden, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf der Polaren oh von n .

2) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

3) Wenn eine Sehne sich um den Punkt p dreht, so beschreibt der Schnittpunkt der in ihren Endpunkten gezogenen Tangenten die Polare von p .

4) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

5) Wenn man zu jedem Punkte der Geraden A denjenigen Punkt der Geraden B sucht, welcher ihm conjugirt ist, so entstehen auf A und B zwei projectivische Punktreihen.

6) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

7) Welches ist der geometrische Ort für diejenigen Strahlen, welche conjugirte Punkte zweier Geraden A und B verbinden, wenn

α) A und B sich nicht auf dem Kegelschnitte treffen,

β) A und B sich in einem Punkte m des Kegelschnitts treffen?

Andeutung α). Diese Strahlen umhüllen einen Kegelschnitt. Tangenten desselben sind auch diejenigen Geraden, welche den gegebenen Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit A und B berühren.

β) Die Strahlen gehen alle durch einen Punkt. Durch denselben gehen die beiden Geraden, welche den gegebenen Kegelschnitt in denjenigen Punkten berühren, welche er, ausser m , mit den Geraden A und B gemein hat.

8) Die zugeordneten Fragen zu stellen und zu lösen.

9) Zwei Seiten eines einbeschriebenen Dreiecks werden von jeder Geraden, welche den Pol der dritten Seite enthält, in conjugirten Punkten geschnitten (7).

10) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

11) Wenn man durch jeden Punkt m einer Geraden A denjenigen Strahl zieht, welcher der Verbindungslinie von m mit einem festem ausserhalb A gelegenen Punkte C conjugirt ist, so hüllen diese Strahlen einen Kegelschnitt ein. Nur, wenn die Gerade A und die Polare B von b sich auf dem gegebenen Kegelschnitt schneiden, so gehen diese Strahlen durch einen Punkt.

12) Den zugeordneten Satz auszusprechen und zu beweisen.

13) Kegelschnitte zu bestimmen, von welchen ein Polardreieck gegeben ist und

α) ein Curvenpunkt, welcher auf keiner Seite des Polardreiecks liegt;

β) eine Tangente, welche durch kein Eck des Polardreiecks geht;

γ) ein Curvenpunkt auf einer Seite des Polardreiecks;

δ) eine Tangente, welche durch ein Eck des Polardreiecks geht;

ϵ) zwei conjugirte Punkte auf einer Seite, welche Secante des Kegelschnitts ist*);

ζ) zwei conjugirte Strahlen eines Ecks, welches ausserhalb des Kegelschnitts gelegen ist;

η) zu einem Punkte einer Seite, welche Secante des Kegelschnitts ist, die durch das gegenüberliegende Eck gehende Polare.

Andeutung. In allen Fällen gibt es unendlich viele Kegelschnitte. Die Kegelschnitte α) gehen durch 4 feste Punkte (§ 57b, § 36c § 14, 12). Die Kegelschnitte β) haben 4 feste Tangenten (§ 14, 13). In den

*) Die conjugirten Punkte müssen alsdann beide innerhalb der Dreieckseite liegen oder dieselbe einschliessen.

übrigen Fällen haben die Kegelschnitte 2 Punkte und die Tangenten in diesen Punkten gemeinsam. Man verwende zum Beispiel zur Auffindung von γ und ε § 57b, § 36a, § 33, 10 β und 12 β .

14) Kegelschnitte zu bestimmen, in Bezug auf welche der Punkt p Pol der Geraden P ist, wenn noch gegeben sind:

- α) zwei Curvenpunkte, welche nicht auf P liegen;
- β) zwei Tangenten, welche nicht durch p gehen;
- γ) ein Punkt, der nicht auf P gelegen ist und die Tangente in demselben;

δ) zwei Paare conjugirter Punkte auf P unter der Voraussetzung, dass P die Curve schneide*);

ε) zwei Paare conjugirter Strahlen, welche durch p gehen, unter der Voraussetzung, dass p ausserhalb der Curve liegt**).

Andeutung. In jedem Falle erhält man unendlich viele Kegelschnitte, welche bezüglich durch 4 feste Punkte gehen (α), 4 feste Gerade berühren (β) oder zwei Punkte und die Tangenten in denselben gemein haben.

15) Kegelschnitte zu bestimmen, für welche die Punkte p und q Pole der Geraden P und Q sind, unter der Voraussetzung, dass pq Secante der Curven sei***).

Andeutung. Unendlich viele Kegelschnitte, welche zwei Punkte und die Tangenten in denselben gemein haben.

16) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, von welchem ein Polardreieck pqz gegeben ist und

- α) zwei Punkte, die auf keiner Seite liegen (13 α und § 56 α 1);
- β) zwei Tangenten, die durch keinen Eckpunkt gehen (§ 13 β und § 53a 1);

γ) ein Punkt, der auf keiner Seite liegt und eine Tangente, welche durch kein Eck geht (13 α und § 54, 13 oder 13 β und § 54, 16);

δ) zwei conjugirte Punkte, welche auf einer Seite pq liegen unter der Voraussetzung, dass diese Seite Secante der Curve sei und ein Curvenpunkt, welcher auf keiner Seite liegt (13 ε und § 53a, 3);

ε) zwei solche conjugirte Punkte und eine Tangente, welche durch keinen Eckpunkt geht (13 ε und § 53a, 3);

ζ) auf jeder von zwei Seiten, welche Secanten der Curve sind, zwei conjugirte Punkte (§ 33, 13 β);

η) ein Punkt p , welcher auf keiner Seite des Dreiecks liegt und seine Polare P .

Andeutung. In jedem Falle existirt nur ein Kegelschnitt oder deren zwei, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Bei η) ist durch die gegebenen Stücke die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf jeder Seite des Polardreiecks bestimmt, da aber immer ein Eck des

*) Das eine Paar conjugirter Punkte muss von dem andern eingeschlossen sein.

**) Wie müssen unter dieser Voraussetzung die gegebenen Paare conjugirter Elemente gegen einander liegen?

***)) Die gegebenen Punkte müssen alsdann in demselben der durch P und Q gebildeten Winkel oder in zwei Scheitelwinkeln liegen.

Polardreiecks innerhalb und die beiden andern ausserhalb der Curve liegen müssen, so wird nur dann ein Kegelschnitt möglich sein, wenn p und P so liegen, dass die auf zwei Dreieckseiten bestimmten involutorischen Gebilde Doppelpunkte haben.

17) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, so dass der Punkt p der Pol der Geraden P ist, wenn zugleich gegeben sind:

α) drei Curvenpunkte (14 α und § 53 α , 1);

β) zwei Punkte und eine Tangente (zwei Auflösungen. — 14 α und § 54, 13);

γ) zwei Tangenten und ein Curvenpunkt (zwei Auflösungen. — 14 β und § 54, 15);

δ) drei Tangenten (14 β und § 53 α , 1);

ϵ) zwei Punkte und die Tangente in einem derselben;

ζ) zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben.

18) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, so dass die Punkte p und q Pole der Geraden P und Q sind, wenn vorausgesetzt wird, dass pq Secante der Curve ist und ausserdem gegeben ist:

α) ein Curvenpunkt (15 und § 53 α , 3);

β) eine Tangente (15 und § 53 α , 3).

19) Ein gemeinschaftliches Polardreieck zweier Kegelschnitte anzugeben, wenn diese Kegelschnitte

α) 4 Punkte a, b, c, d ,

β) 4 Tangenten A, B, C, D ,

γ) zwei Punkte a, b und die Tangenten in denselben gemeinsam haben.

Andeutung. α) Das durch die Nebenecken des vollständigen Vierecks der Punkte a, b, c, d , gebildete Dreieck. β) Das durch die Diagonalen des vollständigen Vierseits der Geraden A, B, C, D gebildete Dreieck. γ) Jedes Dreieck, welches zwei conjugirte Punkte der Secante ab und den Pol dieser Geraden zu Ecken hat.

20) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher den Bedingungen von 16, δ oder 18, α genügt, wenn man annimmt, dass die Gerade pq die Curve nicht trifft.

Andeutung. Je zwei conjugirte Punkte von pq und der Pol dieser Geraden bilden ein Polardreieck. Nach § 14, 12 kann man also beliebig viele Punkte des Kegelschnitts bestimmen. Nach § 53 α existirt nur ein Kegelschnitt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

21) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher den Bedingungen 16, ϵ oder 18, β genügt, wenn man annimmt, dass die Gerade pq die Curve nicht trifft.

Andeutung. Je zwei conjugirte Punkte von pq und der Pol dieser Geraden bilden ein Polardreieck. Nach § 14, 13 kann man beliebig viele Tangenten des Kegelschnitts bestimmen. Nach § 53 α existirt nur ein Kegelschnitt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügt.

22) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn, unter der Voraussetzung, dass die Gerade G die Curve nicht schneidet, die involutorische Reihe der conjugirten Punkte auf G bestimmt ist (d. h. wenn auf G zwei imaginäre Curvenpunkte gegeben sind. — Siehe die Anmerkung zu § 36), und ausserdem

α) drei Curvenpunkte a, b, c gegeben sind oder

β) zwei Curvenpunkte a, b und die Tangente A in a .

Andeutung. Man kann im Falle α) für die Schnittpunkte von G mit ab, bc, ca und im Falle β) für die Schnittpunkte von G mit ab und A die Polaren bestimmen. Wende 20) an.

23) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn unter der Voraussetzung, dass der Punkt m innerhalb der Curve liegt, der involutorische Strahlenbüschel, welchen die durch m gehenden conjugirten Strahlen bilden, bekannt ist (d. h. wenn die beiden durch m gehenden imaginären Tangenten der Curve gegeben sind), und ausserdem

α) drei Tangenten A, B, C gegeben sind oder

β) zwei Tangenten A, B und der Berührungspunkt a der einen.

Andeutung. Man bestimme die Pole der Linien, welche im Falle α) die Schnittpunkte der Geraden A, B, C mit m verbinden und im Falle β) die Pole der Geraden, welche von m nach dem Punkte a und dem Schnittpunkte von A und B gezogen sind (wende 21) an).

24) Zu beweisen, dass in dem Falle 19, α und β nur ein einziges gemeinschaftliches Polardreieck beider Curven existirt.

Andeutung. Wenn ausserdem der Punkt p und die Gerade P einen Pol und seine Polare in Bezug auf beide Kegelschnitte darstellen würden, so müssten die Kegelschnitte zusammenfallen. Man beweist dies durch 16, η , wenn man annimmt, dass p auf keiner Seite des Polardreiecks liegt oder nach 16, δ und 20 (bezüglich für 19, β durch 16, ϵ und 21), wenn man annimmt, dass p auf einer Seite des Polardreiecks liege.

25) Wenn zwei Kegelschnitte 4 gemeinsame Punkte und 4 gemeinsame Tangenten haben, wie die beiden Kegelschnitte, welche als Lösung von 16, γ auftreten, welche Lage haben alsdann die Nebenecken in dem vollständigen Viereck der gemeinsamen Punkte und die Diagonalen in dem vollständigen Vierseit der gemeinsamen Tangenten?

Andeutung. Das Dreieck der Nebenecken fällt mit dem Dreieck der Diagonalen zusammen (24).

26) Wenn zwei Kegelschnitte K und K' einer Ebene entsprechende Figuren zweier perspectivischer Systeme sind, so entsprechen sich

α) die Polaren homologer Punkte und

β) die Pole homologer Geraden

in beiden Figuren.

Andeutung. α) Wenn man durch den Punkt m des einen Systemes zwei Secanten von K zieht, so entsprechen ihnen zwei durch den entsprechenden Punkt m' gehende Secanten von K' . Die Polaren theilen diese Secanten harmonisch und die Behauptung folgt aus § 44 d.

27) Unter den Bedingungen 26) entsprechen zwei Punkten der einen Figur, welche in Bezug auf K conjugirt sind, solche Punkte der andern Figur, welche in Bezug auf K' conjugirt sind.

28) Unter den Bedingungen 26) sind ferner

α) zwei Punkte der Projectiionsaxe, welche in Bezug auf K conjugirt sind, zugleich in Bezug auf K' conjugirt und

β) zwei durch den Projectiionsmittelpunkt gehende Strahlen, welche in Bezug auf K conjugirt sind, müssen auch in Bezug auf K' conjugirt sein.

Anmerkung. Der Träger einer involutorischen Reihe conjugirter Punkte, welche zwei Kegelschnitten gemeinsam ist, heisst eine eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehne beider Kegelschnitte, je nachdem die involutorische Reihe zwei Doppelpunkte hat oder keine solche. Das Centrum eines involutorischen Strahlenbüschels conjugirter Strahlen, welcher zwei Kegelschnitten gemeinschaftlich ist, heisst der Scheitel eines eigentlichen oder uneigentlichen Tangentenwinkels, je nachdem der involutorische Büschel zwei Doppelstrahlen hat oder keine solche (Anmerkung zu § 36).

29) Unter den Bedingungen 26) ist die Projectionsaxe eine eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehne gleichartiger Lage und der Projectionsmittelpunkt ist der Scheitel eines eigentlichen oder uneigentlichen gemeinschaftlichen Tangentenwinkels gleichartiger Lage (§ 54, 22 γ und δ).

30) Die Gerade G sei für zwei Kegelschnitte K und K' derselben Ebene eine gemeinschaftliche Sehne gleichartiger Lage (§ 54, 22 γ). Man soll zwei perspectivische Systeme bestimmen, in welchen G die Projectionsaxe und K, K' entsprechende Curven sind.

Andeutung. Die Pole m und m' von G müssen entsprechende Punkte sein. Wenn ausserdem p ein Punkt von G ist, welcher ausserhalb der beiden Kegelschnitte liegt und die Polaren P und P' von p die beiden Kegelschnitte bezüglich in a, b und a', b' schneiden, so sind zwei perspectivische Systeme bestimmt, wenn man die Punkte a und a' entsprechend setzt. Ein zweites Paar perspectivischer Systeme findet man, wenn a und b' entsprechend gesetzt werden. Zum Beweise unterscheide man die Fälle, wo G eine eigentliche Secante der Kegelschnitte mit den Schnittpunkten r und s oder eine uneigentliche Secante beider Kegelschnitte ist. Im ersten Falle erwäge man, dass der Kegelschnitt des zweiten Systemes, welcher dem Kegelschnitt K des ersten entspricht, die Geraden $m'r$ und $m's$ in r und s berühren und durch a' gehen muss. Er muss also nach § 53 α mit K zusammenfallen. Im zweiten Falle bemerke man, dass für diesen durch a' gehenden Kegelschnitt G und P' die Polaren von m' und p sind. Er muss also nach Aufgabe 20) mit K' zusammenfallen.

31) G sei eine gemeinschaftliche Sehne zweier Kegelschnitte. Man soll die (zwei oder vier) gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte aufsuchen.

Andeutung. Durch 30) kommt man auf zwei Projectionsmittelpunkte. Sie sind die Scheitel von eigentlichen oder uneigentlichen gemeinsamen Tangentenwinkeln (§ 54, 22 β).

32) Der Punkt m sei für zwei Kegelschnitte K und K' derselben Ebene der Scheitel eines gemeinschaftlichen Tangentenwinkels gleichartiger Lage. Man soll zwei perspectivische Systeme bestimmen, in welchen m der Projectionsmittelpunkt und K, K' entsprechende Curven sind.

Andeutung. Man kommt zu zwei Auflösungen, wenn man den der Andeutung zu 30) dualistisch zugeordneten Weg verfolgt.

33) m sei der Scheitel eines für zwei Kegelschnitte gemeinsamen

Tangentenwinkels. Man soll die (zwei oder vier) gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte finden.

Andeutung. Durch 32) kommt man zu zwei Projectionsaxen, welche eigentliche oder uneigentliche gemeinschaftliche Sehnen beider Kegelschnitte sind.

34) Wenn zwei gemeinschaftliche Punkte von K und K' bekannt sind, so soll man die übrigen finden (31 und 33).

35) Wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten von K und K' bekannt sind, so soll man die übrigen finden (33 und 31).

36) Wenn durch einen Punkt p Secanten eines Kegelschnitts gezogen werden, welche denselben in den Punktpaaren $a, a'; b, b'; c, c' \dots$ treffen, so werden diese Punktpaare aus jedem Punkte s des Kegelschnitts durch einen involutorischen Strahlenbüschel projicirt.

Andeutung. Die Strahlenbüschel $a(b, b', c, c' \dots)$ und $a'(b', b, c', c \dots)$ sind nach § 60, 1; § 16b unter sich projectivisch. Da aber nach § 52a auch $a'(b', b, c', c \dots)$ und $a(b', b, c', c \dots)$ projectivisch sind, so folgt nach § 52a die Projectivität von $a(b, b', c, c' \dots)$ und $a(b', b, c', c \dots)$ und die Behauptung folgt aus § 30β und § 54, 9.

37) Wenn man in der Ebene eines Kegelschnitts einen Punkt p als Mittelpunkt und seine Polare P als Axe eines involutorischen Systemes annimmt, so sind

α) je zwei Schnittpunkte des Kegelschnitts mit einer durch p gezogenen Geraden zugeordnete Punkte und

β) je zwei Tangenten des Kegelschnitts, welche durch einen Punkt von P gezogen sind, stellen zugeordnete Geraden vor.

38) Wenn die zugeordneten Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels, dessen Scheitel s auf einem Kegelschnitt gelegen ist, den letzteren in den Punktpaaren $a, a'; b, b'; c, c' \dots$ treffen, so gehen die Geraden $aa', bb', cc' \dots$ durch einen Punkt.

Andeutung. Man sehe den Schnittpunkt von aa' und bb' als den Punkt p an, von welchem in 37 die Rede ist und führe mit Hülfe von 37 und § 31b einen indirecten Beweis.

39) Ein involutorischer Strahlenbüschel sei durch zwei Paare zugeordneter Strahlen bestimmt. Man soll mit Hülfe von 38) zu jedem weitem Strahle den zugeordneten finden.

Andeutung. Man ziehe einen Kreis, welcher durch den Scheitel des Büschels geht.

40) Es sind zwei concentrische involutorische Strahlenbüschel gegeben. Man soll das gemeinsame Paar zugeordneter Strahlen finden.

Andeutung. Man ziehe einen Kreis durch den Scheitel. Die beiden involutorischen Strahlenbüschel führen nach 38) zu zwei Punkten pa , deren Verbindungslinien den Kegelschnitt in zwei Punkten treffen, welche auf den gesuchten Strahlen liegen.

41) Diejenigen conjugirten Strahlen einer involutorischen Reihe zu bestimmen, welche zu zwei durch den Scheitel gezogenen Geraden harmonisch liegen.

III. Abschnitt.

Der Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade.

Eintheilung der Kegelschnitte.

§ 61.

Die Kegelschnitte zerfallen in 3 Arten:

a) Die Kegelschnitte der 1. Art enthalten keinen unendlich fernen Punkt. Sie bestehen aus einer in sich geschlossenen Curve.

b) Die Kegelschnitte der 2. Art enthalten zwei unendlich ferne Punkte. Sie bestehen aus zwei getrennten Aesten, welche beiderseits ins Unendliche verlaufen. In der Ebene eines solchen Kegelschnitts existiren zwei Gerade, welche als Tangenten der unendlich fernen Curvenpunkte zu betrachten sind und Asymptoten heissen. Die beiden Seiten eines jeden Curvenastes scheinen gegen die Asymptoten zu convergiren, erreichen jedoch dieselben in dem endlichen Raum der Ebene nicht.

c) Die Kegelschnitte der 3. Art enthalten einen unendlich fernen Punkt. Die unendlich ferne Gerade ist als Tangente der Curve in diesem Punkte zu betrachten. Diese Curven bestehen aus einem Aste, welcher beiderseits ins Unendliche verläuft.

Beweis. Ein Kegelschnitt ist die perspectivische Abbildung eines Kreises. Es können nun 3 Fälle eintreten:

a) Die Gegenaxe G der Original-ebene trifft den Kreis nicht (Fig. 57).

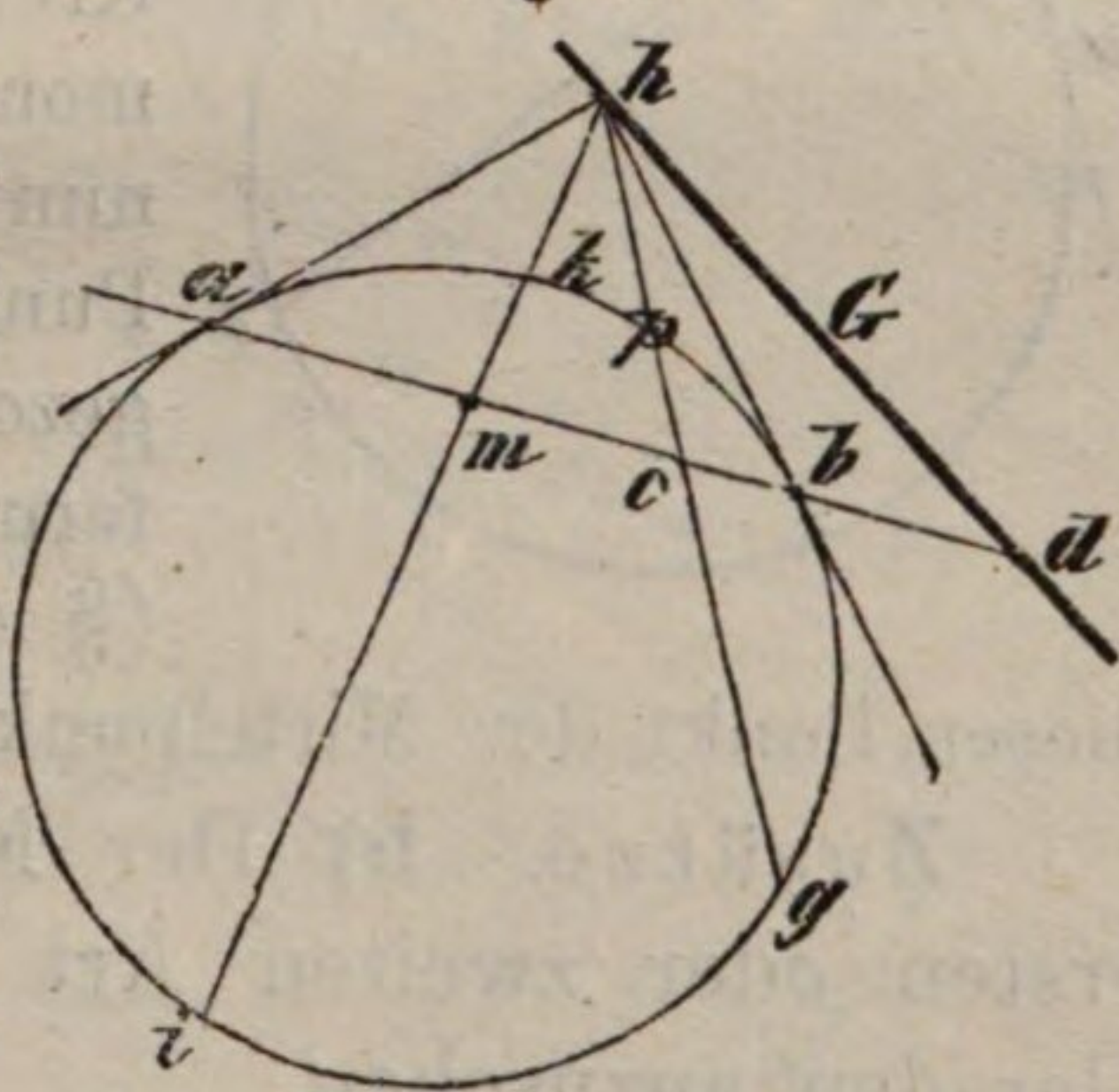
b) Die Gegenaxe G der Originalfigur trifft den Kreis in 2 getrennten Punkten n und e (Fig. 58).

c) Die Gegenaxe G berührt den Kreis in einem Punkte c (Fig. 59).

Im ersten Falle kann der Kegelschnitt keinen unendlich fernen Punkt enthalten, weil demselben in der Originalfigur ein gemeinsamer Punkt der Gegenaxe und des Kreises entsprechen müsste, welcher der Annahme nach nicht existirt (vergl. § 48).

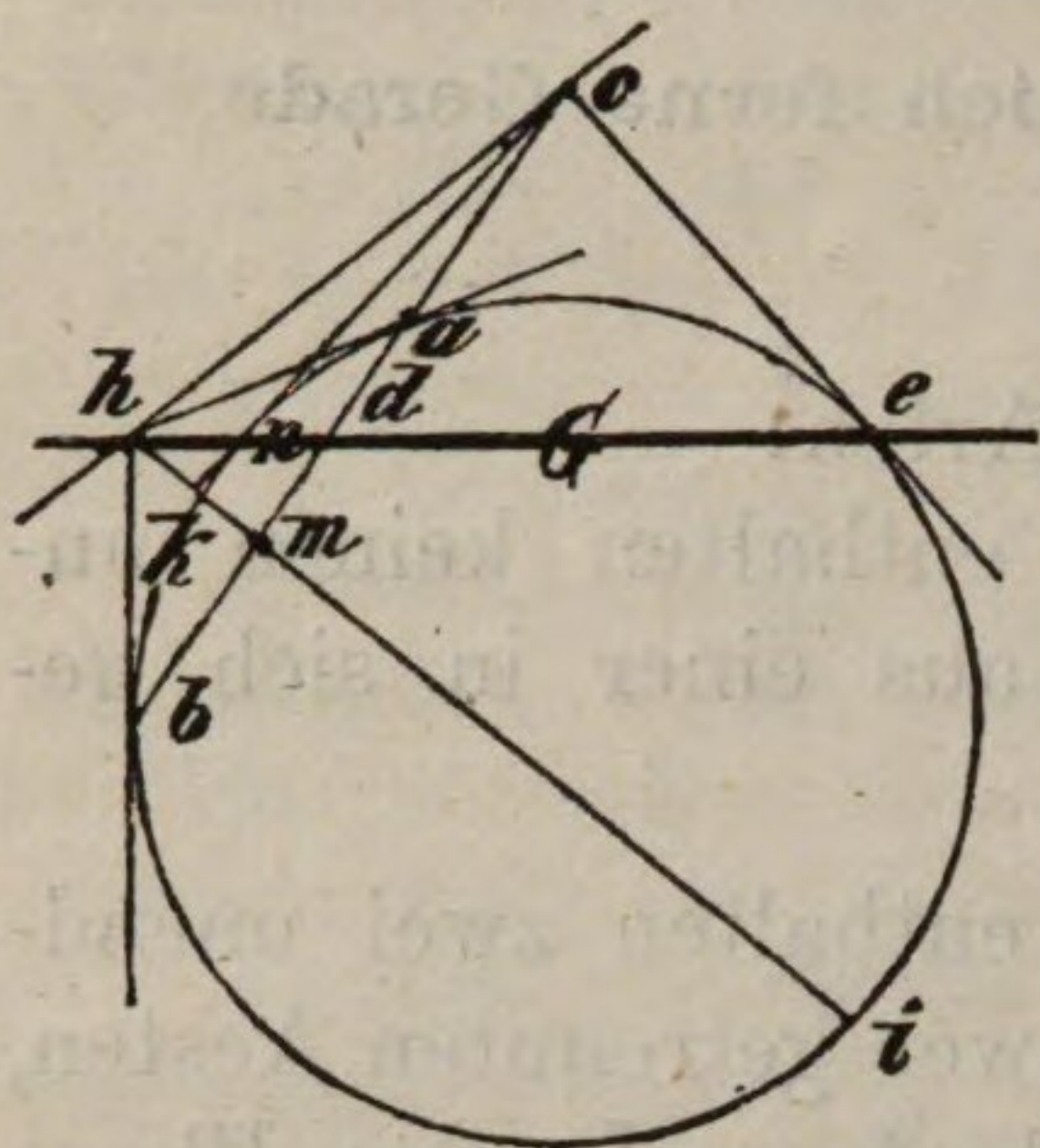
Im zweiten Falle enthält der Kegelschnitt zwei unendlich ferne Punkte n' und e' , welche den Punkten n und e der Originalfigur Fig. 58 entsprechen (§ 48). Den Tangenten nc und lc

Fig. 57.



der Kreispunkte n und l müssen in der Abbildung zwei Gerade entsprechen, welche als Tangenten der unendlich fernen Punkte n' und l' anzusehen sind. Den beiden Kreisbogen nal und nbl entsprechen zwei Curvenäste, von welchen jeder beiderseits nach den unendlich fernen Punkten n' und l' verläuft.

Fig. 58.



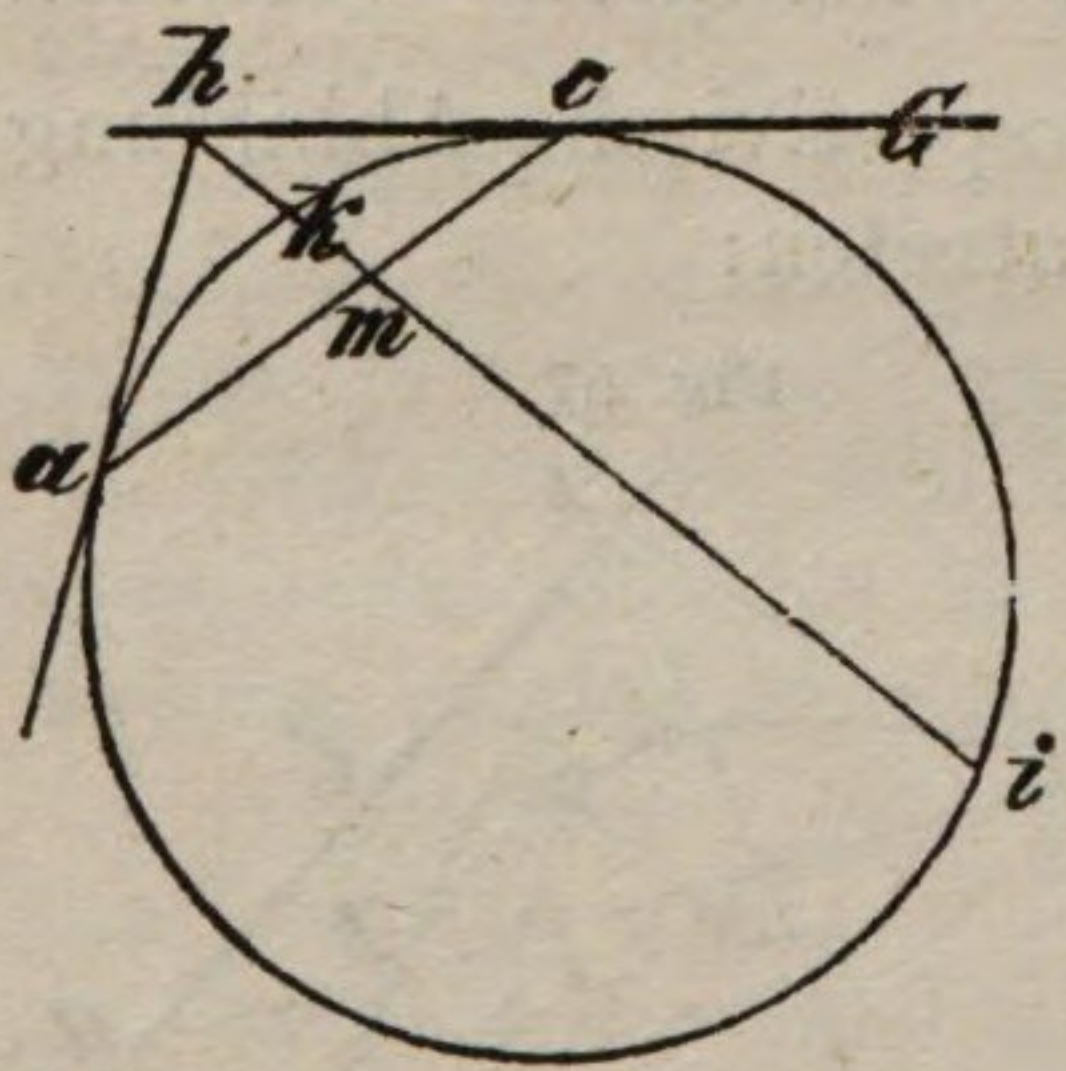
Im dritten Falle enthält der Kegelschnitt einen unendlich fernen Punkt c' , welcher dem Punkte c der Originalfigur Fig. 59 entspricht. Der Gegenaxe G der Originalfigur, welche den Kreis in c berührt, entspricht die unendlich ferne Gerade der Abbildung, welche als Tangente des Kegelschnitts in c' anzusehen ist. Der Kegelschnitt besteht aus einem Aste, der beiderseits gegen den Punkt c' ins Unendliche verläuft.

§ 62. Die Kegelschnitte der 1. und 2. Art haben einen Mittelpunkt.

a) In jedem Kegelschnitte der ersten und zweiten Art existirt ein Punkt (Mittelpunkt der Curve), welcher die durch ihn gezogenen Sehnen (Durchmesser der Curve) halbt.

Beweis. Derjenige Kreis, dessen perspectivische Abbildung der vorliegende Kegelschnitt ist, wird durch die Gegenaxe G (Fig. 57 und 58) der Original-

Fig. 59.



ebene nicht berührt. Die durch den Pol c dieser Gegenaxe gezogenen Secanten des Kreises werden daher von derselben harmonisch getheilt. Dem Punkte c entspricht nun in der Ebene des Kegelschnitts ein Punkt c' von der Art, dass die durch ihn gezogenen Secanten durch die unendlich ferne Gerade harmonisch getheilt werden (§ 44 d). Aus § 12 c folgt daher, dass

dieser Punkt der Mittelpunkt der durch ihn gezogenen Sehnen ist.

Zusätze. b) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts der ersten oder zweiten Art ist als Pol der unendlich fernen Geraden anzusehen.

c) Jeder Durchmesser ist die Polare eines unendlich fernen Punktes (vergl. b und die §§ 57 b, 35, c und γ).

d) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts der ersten Art liegt innerhalb der Curve. Der Mittelpunkt eines Kegel-

schnitts der zweiten Art liegt ausserhalb der Curve. Die durch ihn gezogenen Tangenten sind die Asymptoten des Kegelschnitts der zweiten Art.

Beweis. Wenn der vorliegende Kegelschnitt von der 1ten Art ist, so liegt der Punkt c der Originalfigur innerhalb des Kreises (§ 34b) und die Behauptung folgt aus § 51. Ist der Kegelschnitt von der 2ten Art, so liegt der Punkt c der Originalfigur ausserhalb des Kreises. Die von c an den Kreis gelegten Tangenten cn und cl (Fig. 58) berühren den Kreis in den Punkten n und l der Gegenaxe. Die entsprechenden Geraden der Abbildung sind Tangenten des Kegelschnitts (§ 45a) und berühren denselben in den unendlich fernen Punkten n' und l' .

Conjugirte Durchmesser.

§ 63.

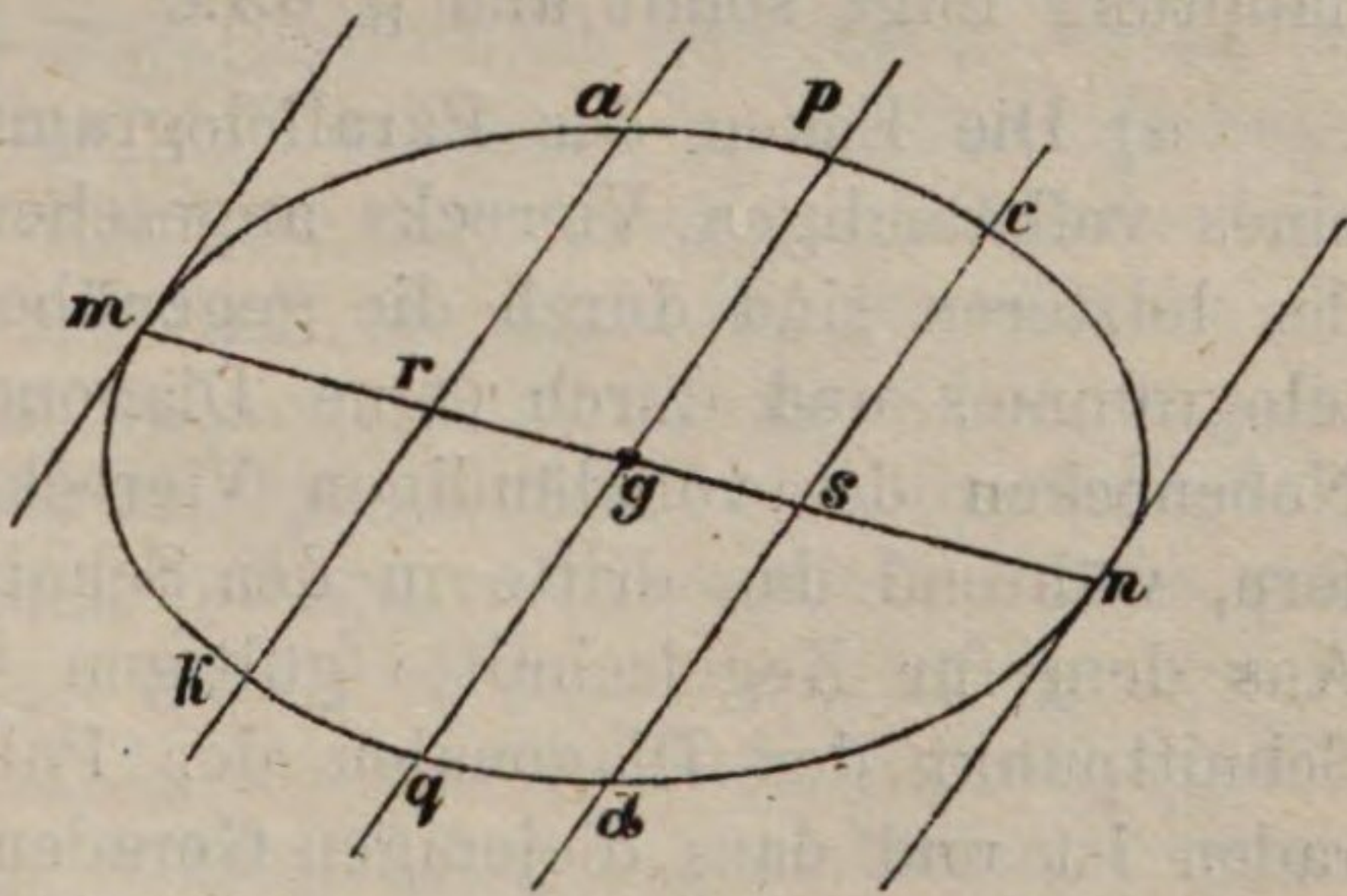
a) Je zwei conjugirte Strahlen, welche sich in dem Mittelpunkte eines Kegelschnitts schneiden, heissen conjugirte Durchmesser. Die conjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden einen involutorischen Strahlenbüschel. Derselbe enthält zwei Doppelstrahlen (die Asymptoten der Curve) oder keine solche, je nachdem der Kegelschnitt von der zweiten oder ersten Art ist.

Der Beweis folgt aus dem nach § 57b auch für Kegelschnitte gültigen § 36 α und § 62d.

b) Jeder von zwei conjugirten Durchmessern ist mit denjenigen Geraden parallel, welche den Kegelschnitt in den Endpunkten des andern berühren. Jeder von zwei conjugirten Durchmessern halbt diejenigen Sehnen, welche mit dem andern parallel sind (Fig. 60).

Beweis. Wenn zwei Durchmesser conjugirt sind, so befindet sich nach § 62c und dem auch für Kegelschnitte (§ 57b) gültigen § 35 β der Pol eines jeden in dem unendlich fernen Punkt des andern. Die erste Behauptung folgt also aus dem für Kegelschnitte (§ 57b) gültigen § 34 β und 22a. Um den zweiten

Fig. 60.



Theil des Satzes zu beweisen, sehe man diejenigen Sehnen, welche einem Durchmesser parallel sind, als Strahlen eines Strahlen-

büschels an, dessen Scheitel in dem unendlich fernen Punkte des Durchmessers gelegen ist (§ 22b). Der unendlich ferne Punkt dieses Durchmessers und seine Polare, der zugehörige conjugirte Durchmesser, theilen nach § 57b, § 36b die parallelen Sehnen harmonisch, das heisst, diese Sehnen werden von dem letzteren Durchmesser halbart (§ 12c).

§ 64. Einbeschriebene und umbeschriebene Parallelogramme.

a) In jedem Parallelogramme, welches einem Kegelschnitt umbeschrieben ist, fällt der Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Mittelpunkte der Curve zusammen. Die Diagonalen selbst sind conjugirte Durchmesser des Kegelschnitts.

α) In jedem Parallelogramme, welches einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, fällt der Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Mittelpunkte der Curve zusammen. Die Seiten des Parallelogrammes sind mit zwei conjugirten Durchmessern parallel.

Beweis a). Das Parallelogramm kann als ein vollständiges Vierseit angesehen werden. Von den Ecken desselben sind zwei Paare durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelogrammes dargestellt, während das dritte Paar aus den unendlich fernen Punkten gebildet ist, welche je zwei parallele Seiten gemein haben. Die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind also durch die unendlich ferne Gerade und die Diagonalen des Parallelogrammes dargestellt. Aus dem nach § 57b für Kegelschnitte gültigen § 36 γ folgt daher, dass die Diagonalen des Parallelogramms sich in dem Pole der unendlich fernen Geraden schneiden und dass dieselben conjugirte Strahlen sind. Die Behauptung folgt somit aus § 63a.

α) Die Ecken des Parallelogrammes können als Eckpunkte eines vollständigen Vierecks angesehen werden. Die Gegenseiten des letzteren sind durch die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogrammes und durch seine Diagonalen dargestellt. Von den Nebenecken des vollständigen Vierecks sind also zwei unendlich fern, während das dritte in den Schnittpunkt der Diagonalen fällt. Aus dem für Kegelschnitte gültigen § 36c folgt nun, dass der Schnittpunkt der Diagonalen der Pol der unendlich fernen Geraden ist und dass diejenigen Geraden, welche man durch diesen Punkt mit den Seiten des Parallelogramms parallel ziehen kann, Seiten eines Polardreiecks und somit conjugirte Strahlen sind. Die Behauptung ergibt sich also aus § 62b und § 63a.

b) Die Berührungspunkte der Seiten eines umbeschriebenen Parallelogrammes bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten mit den Diagonalen des ersten parallel sind.	β) Die Tangenten in den Eckpunkten eines einbeschriebenen Parallelogrammes bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonalen mit den Seiten des ersten parallel sind.
--	---

Beweis b). Das umbeschriebene Parallelogramm stellt ein vollständiges Vierseit dar, dessen Diagonalen durch die unendlich ferne Gerade und die Diagonalen des Parallelogrammes repräsentirt sind und ein Polardreieck bilden. Das Viereck der Berührungspunkte kann als vollständiges Viereck betrachtet werden, dessen Nebenecken nach § 59c in den Ecken jenes Polardreiecks liegen. Zwei dieser Nebenecken müssen daher in die unendlich fernen Punkte der Diagonalen des umbeschriebenen Parallelogrammes fallen, worin der Beweis gelegen ist. Der Beweis von β) ist analog.

Die Kegelschnitte der 3. Art haben keinen Mittelpunkt. § 65.

a) Ein Kegelschnitt der dritten Art hat keinen Mittelpunkt. Es gibt nur eine Tangente eines solchen Kegelschnitts, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. Der Berührungspunkt einer Tangente und die Mittelpunkte der mit ihr parallelen Sehnen liegen auf einer Geraden, welche ein Durchmesser der Curve heisst. Die Durchmesser eines Kegelschnitts der dritten Art sind parallel und nach dem unendlich fernen Punkte der Curve gerichtet.

Beweis. Der Mittelpunkt ist der Pol der unendlich fernen Geraden (§ 62b). Da aber in der Originalfigur der Pol c der Gegenaxe G (Fig. 59), welcher dem Mittelpunkte des Kegelschnitts entspricht, auf der Gegenaxe selbst gelegen ist, wenn der gegebene Kegelschnitt der 3ten Art angehört, so fällt der gesuchte Mittelpunkt eines solchen Kegelschnitts in die unendlich ferne Gerade, das heisst, er existirt nicht in dem endlichen Raume der Ebene. Um die weiteren Behauptungen zu erweisen, nehme man eine Schaar paralleler Sehnen des Kegelschnitts an. Diesen Sehnen und denjenigen mit denselben parallelen Tangenten, welche etwa an den Kegelschnitt gezogen werden können, entsprechen in der Originalfigur die Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Scheitel h auf der Gegenaxe G der Originalfigur liegt. Durch h gehen 2 Tangenten hc und ha desjenigen Kreises, von welchem der Kegelschnitt eine perspectivische Abbildung ist. Der Tangente

hc entspricht die unendlich ferne Gerade in der Ebene des Kegelschnitts und der Tangente ha entspricht eine Tangente des Kegelschnitts, welche den gezogenen Sehnen parallel ist.

Der Geraden ac , welche die durch h gehenden Sehnen des Kreises harmonisch theilt, entspricht eine Sehne des Kegelschnitts, welcher die gegebenen parallelen Sehnen halbt (§ 12c) und Durchmesser genannt wird. Dieser Durchmesser geht durch den Berührungspunkt a' derjenigen Tangente, welche mit den von ihm halbirten Sehnen parallel ist. Die Durchmesser des Kegelschnitts sind unter sich parallel, weil sie nach dem unendlich fernen Punkte c' des Kegelschnitts gehen.

§ 66. Axen der Kegelschnitte.

a) Jeder Kegelschnitt der ersten und zweiten Art enthält zwei conjugirte Durchmesser, welche einen rechten Winkel bilden.	α) Enthält ein Kegelschnitt mehr als ein Paar conjugirter Durchmesser, die einen rechten Winkel bilden, so ist derselbe ein Kreis.
---	--

Beweis a) folgt aus § 63a und § 32a.

α). Wenn ein Kegelschnitt zwei Paare conjugirter Durchmesser enthält, welche rechte Winkel bilden, so stehen je zwei conjugirte Durchmesser senkrecht auf einander (§ 63a und Anmerkung zu § 32a). Jedes umbeschriebene Parallelogramm ist deshalb ein Rhombus (§ 64a und I. § 29, 2), dessen Seiten von dem Schnittpunkt der Diagonalen gleichweit entfernt sind. Die Curve ist also ein Kreis, weil ihre Tangenten von dem Mittelpunkte der Curve gleiche Entfernung haben.

b) Erklärung. Wenn ein Kegelschnitt nur ein Paar conjugirter Durchmesser enthält, welche einen rechten Winkel bilden, so heissen dieselben Axen des Kegelschnitts. Die Endpunkte der Axen heissen Scheitelpunkte der Curve.

c) Die Axen eines Kegelschnitts sind Symmetrielinien der Curve. Die Tangenten in den Endpunkten einer Axe stehen auf derselben senkrecht.

Beweis. Jede Axe ist die Halbirungssenkrechte derjenigen Sehnen, welche mit der zweiten Axe parallel gehen (§ 63b), woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite ergibt sich ebenfalls aus § 63b.

d) Die Axen eines Kegelschnitts der zweiten Art halbiren die von den Asymptoten gebildeten Winkel. (§ 32a.)

e) Jeder Kegelschnitt der dritten Art enthält einen Durchmesser, welcher auf den von ihm halbirten Sehnen senkrecht steht (Axe der Curve).

Beweis. Man ziehe Sehnen der Curve, welche zu der gemeinsamen Richtung aller Durchmesser senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Sehnen liegen auf einer Geraden (§ 65 a), welche die in dem Satze angegebenen Eigenschaften hat.

f) Die Axe eines Kegelschnitts der dritten Art ist eine Symmetrielinie der Curve und bildet mit der Tangente des auf ihr gelegenen Curvenpunktes (Scheitelpunkt der Curve) einen rechten Winkel.

Beweis. Die Axe ist die Mittelsenkrechte der von ihr halbirten Sehnen (e) und deshalb Symmetrieaxe der Figur. Die zweite Behauptung folgt aus § 65 a.

Uebungen.

§ 67.

1) Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind mit dem conjugirten Durchmesser parallel.

2) Von einem Kegelschnitte sind der Mittelpunkt m und die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser gegeben, man soll

α) zu einer durch m gezogenen Richtung die Richtung des conjugirten Durchmessers finden,

β) in einem gegebenen Curvenpunkte die Tangente ziehen,

γ) auf einer gegebenen Tangente den Berührungspunkt finden.

3) Wenn man die Endpunkte eines Durchmessers mit einem beliebigen Curvenpunkte verbindet, so erhält man zwei Richtungen, welche mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind.

4) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche eine gegebene Strecke zur Grundlinie haben, während die übrigen Seiten mit zugeordneten Strahlen eines involutorischen Strahlenbüschels parallel sind, ist ein Kegelschnitt.

5) Den Satz 3) für den Fall auszusprechen, wo je zwei zugeordnete Strahlen des gegebenen involutorischen Strahlenbüschels senkrecht auf einander stehen.

6) Die Schnittpunkte zweier parallelen Tangenten und einer dritten Tangente bestimmen mit dem Mittelpunkte zwei conjugirte Durchmesser.

7) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte, für welche die Richtungen von zwei Paaren conjugirter Durchmesser gegeben sind, wenn diese Kegelschnitte

α) durch zwei gegebene Punkte a und b gehen sollen,

β) eine gegebene Gerade A in einem Punkte a berühren sollen,

γ) zwei gegebene Gerade A und B berühren sollen?

Andeutung. α) Die durch die Mitte von ab gehende Richtung, welche zu ab conjugirt ist. β) Die durch a gehende Richtung, welche zu A conjugirt ist. γ) Zwei Gerade, welche durch den Schnittpunkt von A und B gehen, zu A und B harmonisch und zugleich mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind (§ 60, 40). Zum Beweise § 63 b und für γ) § 64 a; § 14, 3.

8) Dieselben Fragen zu lösen, wenn statt der Richtungen von zwei Paaren conjugirter Durchmesser die Richtungen der Asymptoten gegeben sind.

9) Die Fragen 7) zu beantworten, wenn die gegebenen Richtungen conjugirter Durchmesser rechte Winkel einschliessen.

10) Auf einer Seite eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogrammes ist der Berührungspunkt gegeben, man soll die Berührungspunkte der andern Seiten finden.

11) In einem Eckpunkte eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogrammes ist die Tangente gegeben. Man soll die Tangenten in den übrigen Endpunkten finden.

12) Man soll die Richtungen von einem Paare conjugirter Durchmesser angeben, wenn der Mittelpunkt des Kegelschnitts und

- α) zwei Curvenpunkte,
- β) ein Curvenpunkt und seine Tangente,
- γ) zwei Tangenten

gegeben sind.

13) Alle Kegelschnitte, welche den Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und einen Punkt gemeinsam haben, sind demselben Parallelogramme umbeschrieben. Man soll dieses Parallelogramm construiren.

14) Alle Kegelschnitte, welche den Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und eine Tangente gemeinsam haben, sind demselben Parallelogramme einbeschrieben. Man soll dieses Parallelogramm construiren.

15) Wenn je zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts mit zwei conjugirten Durchmessern eines andern Kegelschnitts parallel sind, so ist die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf der unendlich fernen Geraden beiden Kegelschnitten gemeinsam.

16) Die Kegelschnitte 15) haben die reellen oder imaginären Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

17) Alle Kreise haben die involutorische Reihe conjugirter Punkte auf der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

18) Alle Kreise haben dieselben imaginären Punkte der unendlich fernen Geraden gemeinsam.

19) Zwei Kegelschnitte K und K' , welche der Bedingung 15) genügen, als entsprechende Curven zweier perspectivischer Systeme darzustellen, so dass die unendlich ferne Gerade zur Projectiionsaxe wird (zwei Auflösungen).

20) Die perspectivischen Systeme 19) sind ähnlich.

Andeutung. Je zwei entsprechende Gerade sind parallel (§ 47 β ; § 50, 7) und daher die entsprechenden Dreiecke ähnlich.

21) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser und

α) ein Curvenpunkt (2α , 13),

β) eine Tangente (2α , 14)

gegeben sind.

22) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und

α) zwei Punkte (12α und 21α),

β) ein Punkt und die Tangente in demselben (12β und 21α oder 21β),

γ) zwei Tangenten (12γ und 21β)

gegeben sind.

23) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn der Mittelpunkt, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser und

α) die Länge beider Durchmesser (12α und 21α),

β) die Länge des einen und ein Curvenpunkt (12α und 21α),

γ) die Länge des einen und eine Tangente,

δ) ein Curvenpunkt und eine Tangente

gegeben sind.

Andeutung. γ) Man bestimme die Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers und wende 12γ und 21β an. δ) Durch Anwendung von 13) und § 54, 13 oder von 14) und § 54, 16 erhält man zwei Auflösungen.

24) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt gegeben ist und

α) 3 Curvenpunkte (12α und 21α),

β) 2 Curvenpunkte und die Tangente in einem derselben (12β und 21α),

γ) 2 Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben (12β und 21β),

δ) 3 Tangenten (12γ und 21β).

25) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt, der Pol p einer Geraden P und ausserdem

α) ein Curvenpunkt (§ 60, 18α , bezüglich § 60, 20),

β) eine Tangente (§ 60, 18β)

gegeben sind.

26) Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn die Richtungen von 2 Paaren conjugirter Durchmesser und

α) 3 Curvenpunkte,

β) 2 Curvenpunkte und die Tangente in einem derselben,

γ) 2 Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben,

δ) 3 Tangenten

gegeben sind.

Andeutung. Wende 7) an.

27) Die Aufgabe 26) auszusprechen, wenn die gegebenen Richtungen conjugirter Durchmesser senkrecht auf einander stehen.

28) Die Aufgabe 26) zu lösen, wenn statt der Richtungen conjugirter Durchmesser die Richtungen der Asymptoten gegeben sind.

29) Die Sätze des § 55 auszusprechen und die zugehörigen Figuren zu zeichnen, wenn der in Rede stehende Kegelschnitt der dritten Art

angehört. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Richtung der Hauptaxe den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden bestimmt und umgekehrt

Andeutung. Beispielsweise folgen die Sätze:

α) A, B, C, D, E seien 5 Tangenten. Wenn man durch den Schnittpunkt (BC) eine Parallele mit E und durch (CD) eine Parallele mit A zieht, so liefern diese Geraden einen Schnittpunkt, welcher auf der Verbindungslinie von (AB) und (DE) liegt (§ 55 a).

β) A, B, C, D seien 4 Tangenten. Schneidet man jede mit der folgenden, so entstehen 3 Punkte m, n, p . Wenn man durch m eine Parallele mit D und durch p eine Parallele mit A zieht, so liegt der Schnittpunkt derselben mit n auf einer zur Axe parallelen Geraden (§ 55, b).

γ) Wenn man durch jeden von zwei Curvenpunkten a und b eine Parallele zur Axe zieht und dieselbe mit einer durch den andern Punkt gezogenen Geraden (Secante) schneidet, so ist die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte mit derjenigen Geraden parallel, welche die durch die Secanten bestimmten neuen Curvenpunkte verbindet (55 β).

δ) Die von a aus gezogenen Tangenten B und C mögen von einer dritten Tangente D in b und c geschnitten werden. a, b, c bestimmen ein Parallelogramm, dessen vierter Eckpunkt mit den Berührungspunkten von B und C auf einer Geraden liegt. Zugleich liegt der Berührungspunkt von D mit dem vierten Eckpunkt des Parallelogramms auf einer zur Axe parallelen Geraden (§ 55 c).

ϵ) Zieht man durch die Eckpunkte eines einbeschriebenen Dreiecks abc Parallelen mit der Axe und schneidet man dieselben bezüglich mit den gegenüberliegenden Seiten, so entsteht ein Dreieck, dessen Seiten mit den Tangenten in a, b, c parallel sind (§ 55 γ).

ζ) b und c seien die Berührungspunkte der durch a gezogenen Tangenten. Die Punkte a, b, c bestimmen ein Parallelogramm, dessen durch a gezogene Diagonale mit der Axe parallel ist (§ 55 d).

η) Durch jeden von zwei Curvenpunkten a und b soll eine Parallele zu der Axe gezogen und ihr Schnittpunkt mit der Tangente in dem andern Punkte bestimmt werden. Die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte ist alsdann mit ab parallel (§ 55, δ).

30) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 4 Tangenten bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer dieser Tangenten beliebig angenommen ist, die zweite Tangente an die Curve ziehen (Aufgabe 29 α).

β) Man soll den Berührungspunkt auf einer dieser Tangenten bestimmen (§ 55 b und § 67, 29).

γ) Man soll die Richtung der Axe finden (Aufgabe 29 β).

31) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Tangenten A, B, C und den Berührungspunkt auf A bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer der Tangenten gegeben ist, die zweite Tangente an den Kegelschnitt ziehen (§ 55 b und § 67, Aufgabe 29),

β) den Berührungspunkt auf B und C bestimmen (Aufgabe 29 δ),

γ) die Richtung der Axe bestimmen (Aufgabe 29 δ).

32) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Tangenten und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer der Tangenten gegeben ist, die zweite Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29 γ).

β) Man soll die Berührungspunkte dieser Tangenten bestimmen (Aufgabe 29 δ).

33) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 3 Punkte und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Durch einen dieser Punkte sei eine Gerade gezogen, auf welcher der 2. Schnittpunkt mit der Curve bestimmt werden soll (Aufgabe 29 γ).

β) Man soll in den gegebenen Punkten die Tangenten an die Curve legen (Aufgabe 29, ϵ).

34) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmt.

α) Man soll durch einen Punkt, welcher auf einer dieser Tangenten gegeben ist, die 2. Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29, δ).

β) Man soll die Richtung der Axe finden (Aufgabe 29, ζ).

35) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 2 Punkte a und b , die Tangente in a und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll auf einer durch a gezogenen Richtung den Schnittpunkt mit der Curve bestimmen (Aufgabe 29 ϵ).

β) Man soll in b die Tangente an die Curve ziehen (Aufgabe 29, η).

36) Ein Kegelschnitt der 3. Art sei durch 2 Tangenten A und B , den Berührungspunkt auf A und die Richtung der Axe bestimmt.

α) Man soll durch einen auf A gegebenen Punkt die zweite Tangente an die Curve legen (Aufgabe 29, δ).

β) Man soll den Berührungspunkt auf B bestimmen (Aufgabe 29 ζ).

37) α) Zwei ähnliche Punktreihen in schiefer Lage erzeugen einen Kegelschnitt der 3. Art.

β) Zwei Tangenten eines Kegelschnitts der 3. Art werden von den übrigen Tangenten in ähnlichen Punktreihen geschnitten.

38) Folgende Sätze über die Kegelschnitte der 3. Art zu beweisen.

α) Der Abstand je zweier conjugirter Punkte eines Durchmessers wird durch den auf diesem Durchmesser gelegenen Curvenpunkt halbirt.

β) Zwei mit einer Tangente parallele Strahlen sind conjugirt, wenn der durch sie gebildete Streifen von der Tangente halbirt wird.

γ) Wenn man durch jeden Eckpunkt eines einbeschriebenen Dreiecks den Durchmesser zieht und den Schnittpunkt desselben mit der gegenüberliegenden Seite bestimmt, so entsteht ein Polardreieck.

δ) Wenn man durch die Ecken eines umbeschriebenen Dreiecks Parallelen zu den gegenüber liegenden Seiten zieht, so entsteht ein Polardreieck.

ϵ) Die Polardreiecke γ) und δ) fallen zusammen, wenn die Seiten des umbeschriebenen Dreiecks die Tangenten in den Ecken des einbeschriebenen Dreiecks sind.

39) Kegelschnitte der 3. Art anzugeben, für welche ein gegebenes Dreieck Polardreieck ist.

Andeutung. Es gibt unendlich viele Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen. Die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Polar-

dreiecks bilden die Ecken eines allen diesen Kegelschnitten umbeschriebenen Dreiecks.

40) Kegelschnitte der 3. Art anzugeben, für welche der Punkt p Pol von der Geraden P ist, wenn zugleich

- α) eine Tangente,
- β) die Richtung der Axe

gegeben ist.

Andeutung. Die unendlich vielen Kegelschnitte der 3. Art, welche der Aufgabe genügen, haben im ersten Falle 3 Tangenten gemeinsam, während sie im Falle β) eine feste Gerade in demselben Punkte berühren und die Richtung der Axe (den Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden) gemeinsam haben.

41) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn

- α) 4 Curvenpunkte a, b, c, d ,
- β) 3 Curvenpunkte a, b, c und die Tangente A in a ,
- γ) 2 Curvenpunkte a, b , eine Tangente A , welche durch keinen dieser Punkte geht und die Richtung der Axe,
- δ) 3 Tangenten A, B, C und ein Curvenpunkt d , welcher auf keiner dieser Tangenten liegt, gegeben sind. (In jedem Falle erhält man 2 Auflösungen.)

Andeutung. α) Wenn man durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu den Gegenseiten des vollständigen Vierecks a, b, c, d zieht und die Doppelstrahlen des dadurch bestimmten involutorischen Büschels zieht (§ 33, 5), so stellen diese die Axenrichtungen von zwei Kegelschnitten vor, welche der Aufgabe genügen (§ 54, 13). β) Kann als besonderer Fall von α) aufgefasst werden (vergleiche auch § 54, 15). γ) Kann als besonderer Fall von § 54, 15 dargestellt werden. Von der in Betracht kommenden involutorischen Reihe des Trägers A ist der Mittelpunkt und ein Paar zugeordneter Punkte bekannt. Zur Auflösung von δ) wird § 54, 16 und § 33, 8 verwendet.

42) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn ein Polar-dreieck gegeben ist und

- α) eine Tangente (§ 60, 16 β),
- β) ein Punkt (2 Auflösungen. — § 60, 16 γ).

43) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn der Punkt p der Pol der Geraden P sein soll und

- α) zwei Punkte (2 Auflösungen. — § 60, 17 β),
- β) eine Tangente und ein Curvenpunkt (2 Auflösungen. — § 60, 17 γ),
- γ) zwei Tangenten (§ 60, 17 δ),
- δ) ein Curvenpunkt und die Richtung der Axe (§ 60, 17 ϵ),
- ϵ) eine Tangente und die Richtung der Axe (§ 60, 17 ζ)

gegeben sind.

44) Einen Kegelschnitt der 3. Art zu bestimmen, wenn die Punkte p und q die Pole von den Geraden P und Q sein sollen (§ 60, 18 β).

IV. Abschnitt.

Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten Cursus.

Identität der Kegelschnitte mit den Curven des ersten § 68. Cursus.

a) Jede Ellipse ist ein Kegelschnitt der 1. Art.

Jede Hyperbel ist ein Kegelschnitt der 2. Art.

Jede Parabel ist ein Kegelschnitt der 3. Art.

α) Jeder Kegelschnitt der 1. Art ist eine Ellipse.

Jeder Kegelschnitt der 2. Art ist eine Hyperbel.

Jeder Kegelschnitt der 3. Art ist eine Parabel.

Beweis a). C sei eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel (man benutze die Figur 61, in welcher C ein Kreis ist), f ein Brennpunkt der Curve und mop das von den Tangenten der Punkte a, b, c gebildete Dreieck. Nach § 3f, § 6f, § 9h ist $\angle cfp = \angle afp$ und $\angle cfo = \angle bfo$. Daraus folgt, dass $\angle pfo = \frac{1}{2} \angle afb$. Denkt man sich den Punkt c mit seiner Tangente beweglich, so bleibt der Winkel pfo immer von gleicher Grösse, die Strahlen fp und fo beschreiben zwei congruente Strahlenbüschel und die Punkte o und p zwei projectivische Punktreihen. Es folgt also aus § 52β, dass die Curve C ein Kegelschnitt ist. Wenn C eine Ellipse ist, so ist dieser Kegelschnitt von der 1. Art, weil die Ellipse keinen unendlich fernen Punkt hat. Wenn C eine Hyperbel ist, so muss der Kegelschnitt von der zweiten Art sein, weil die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat, nämlich die Berührungspunkte der Asymptoten mit der Hyperbel (§ 7a). Wenn C eine Parabel ist, so wird der Kegelschnitt der 3. angehören, weil die Parabel keinen Mittelpunkt haben kann, was man daraus erkennt, dass ein solcher auf der Axe der Parabel liegen müsste (§ 8c), welche die Curve nur in einem Punkte trifft.

Fig. 61.

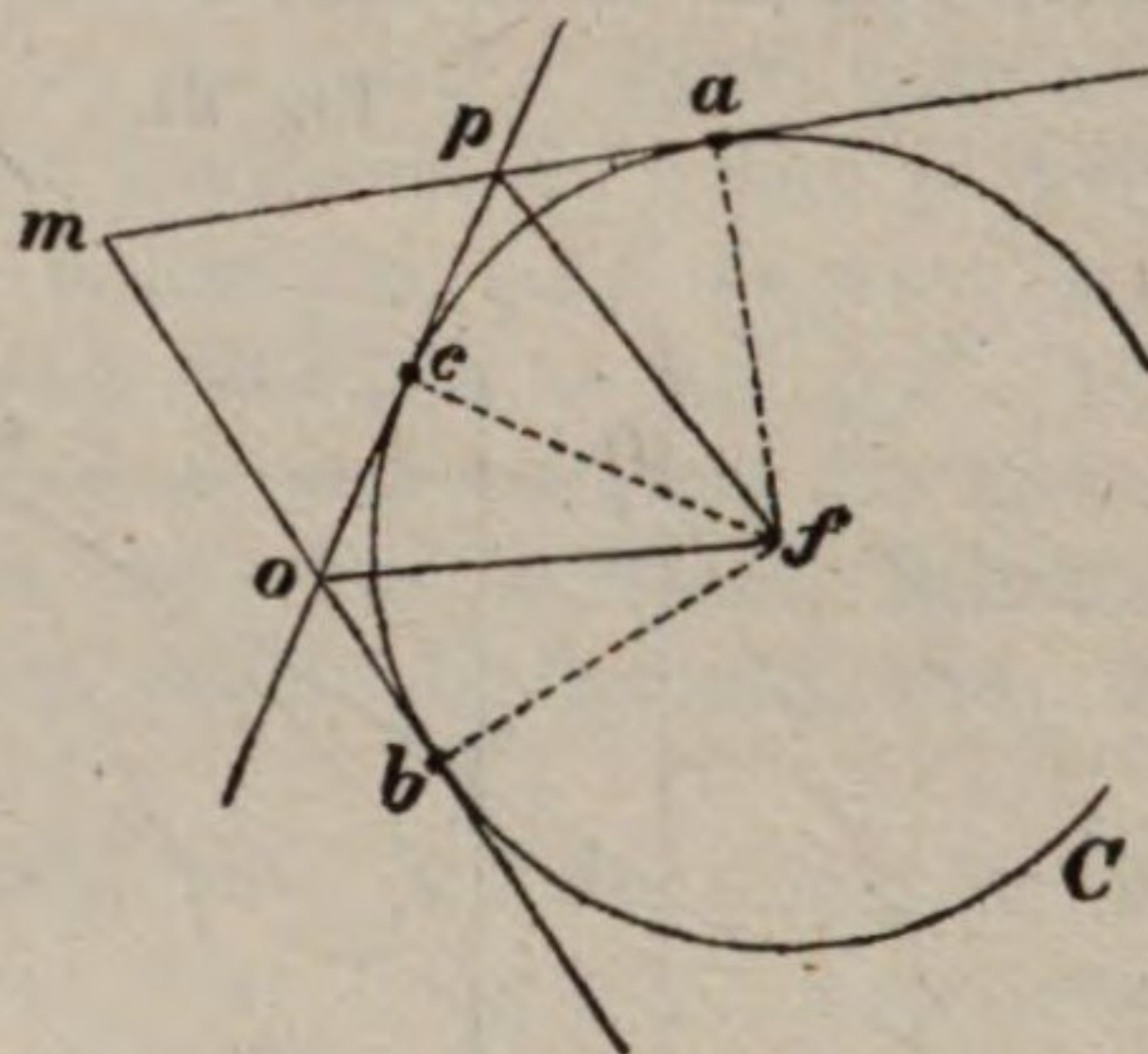
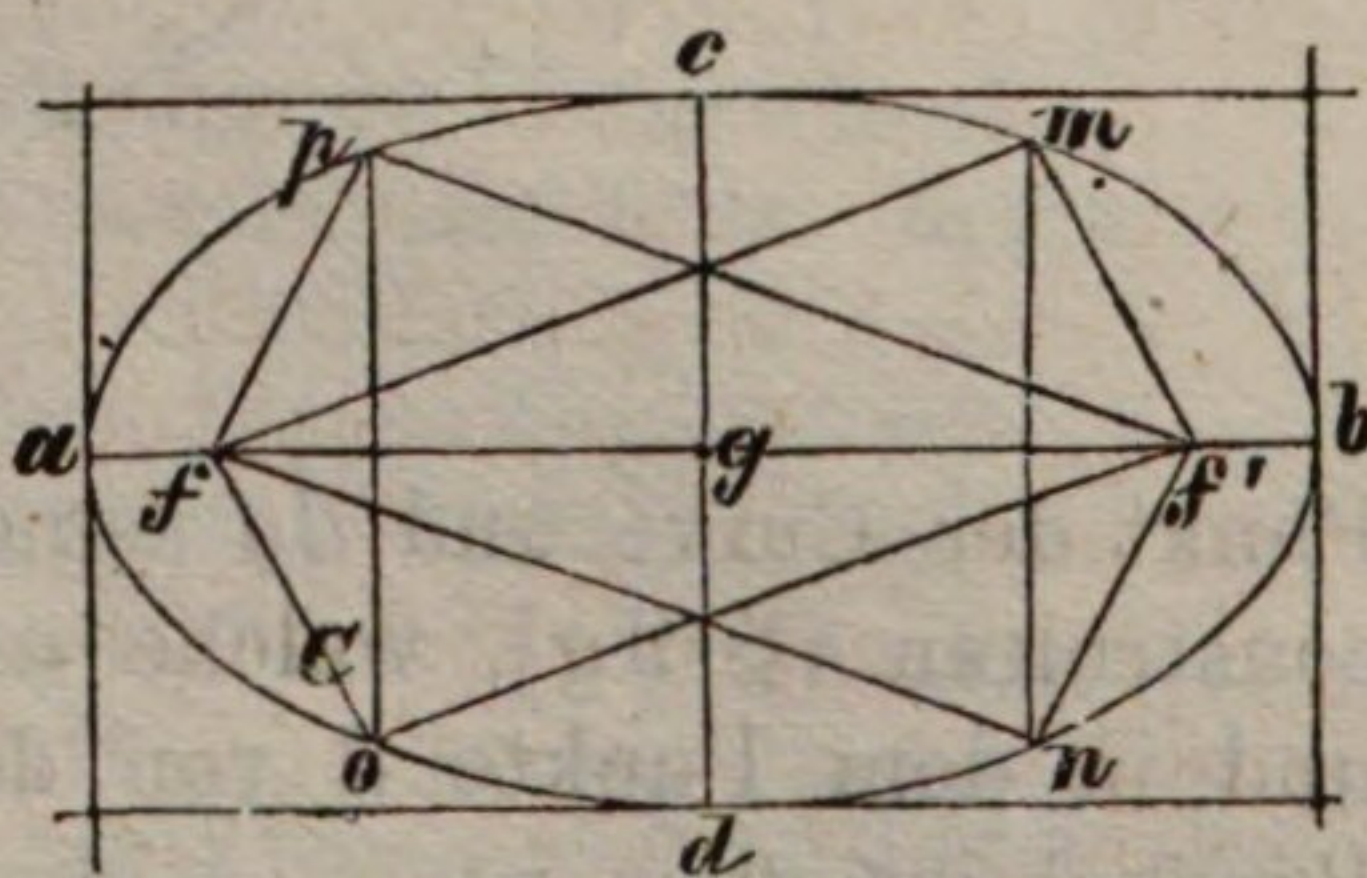
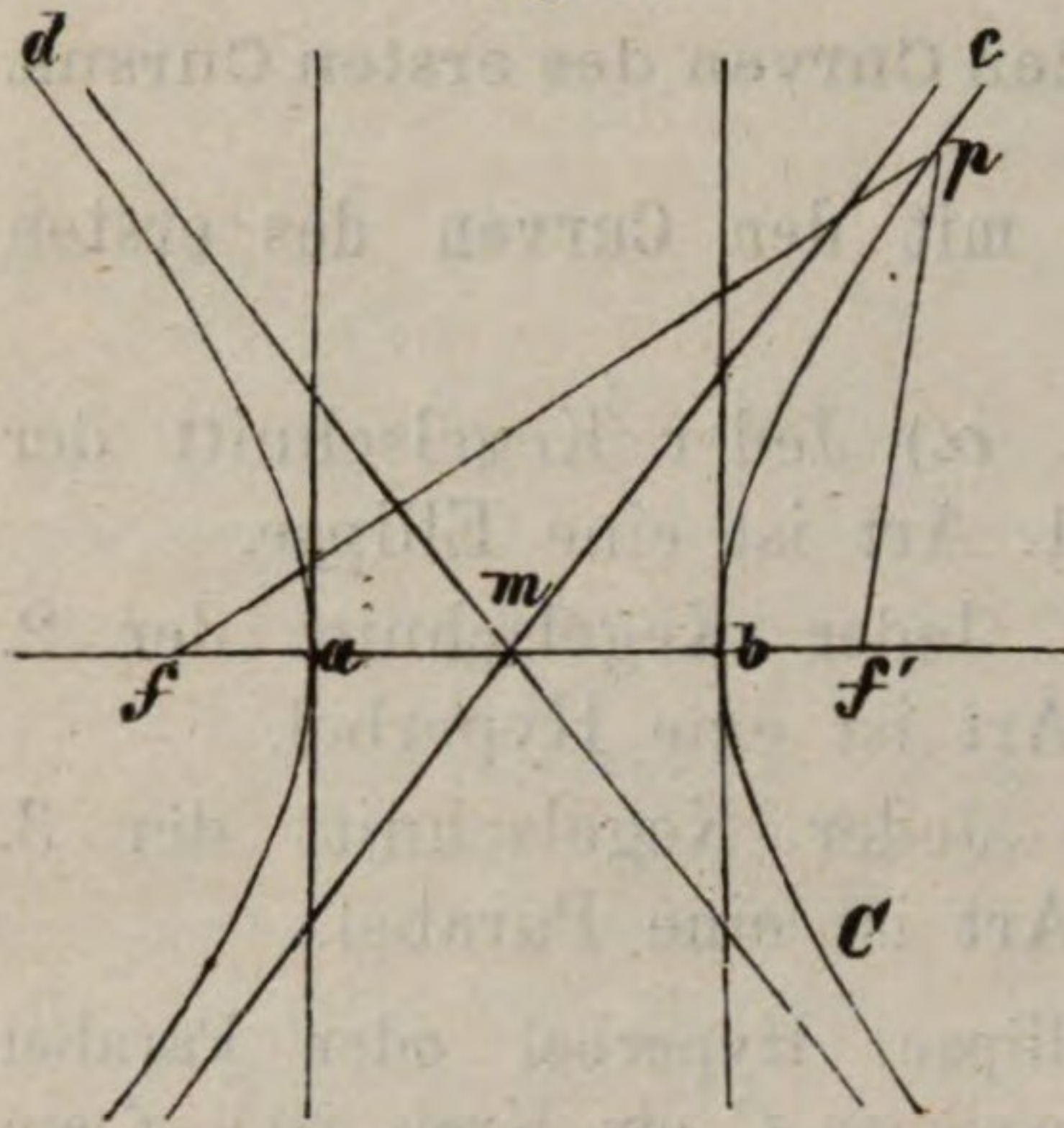


Fig. 62.



α) 1) ab und cd (Fig. 62) seien die beiden Axen (§ 66) eines Kegelschnitts C der ersten Art. Man kann nun nach § 2 b

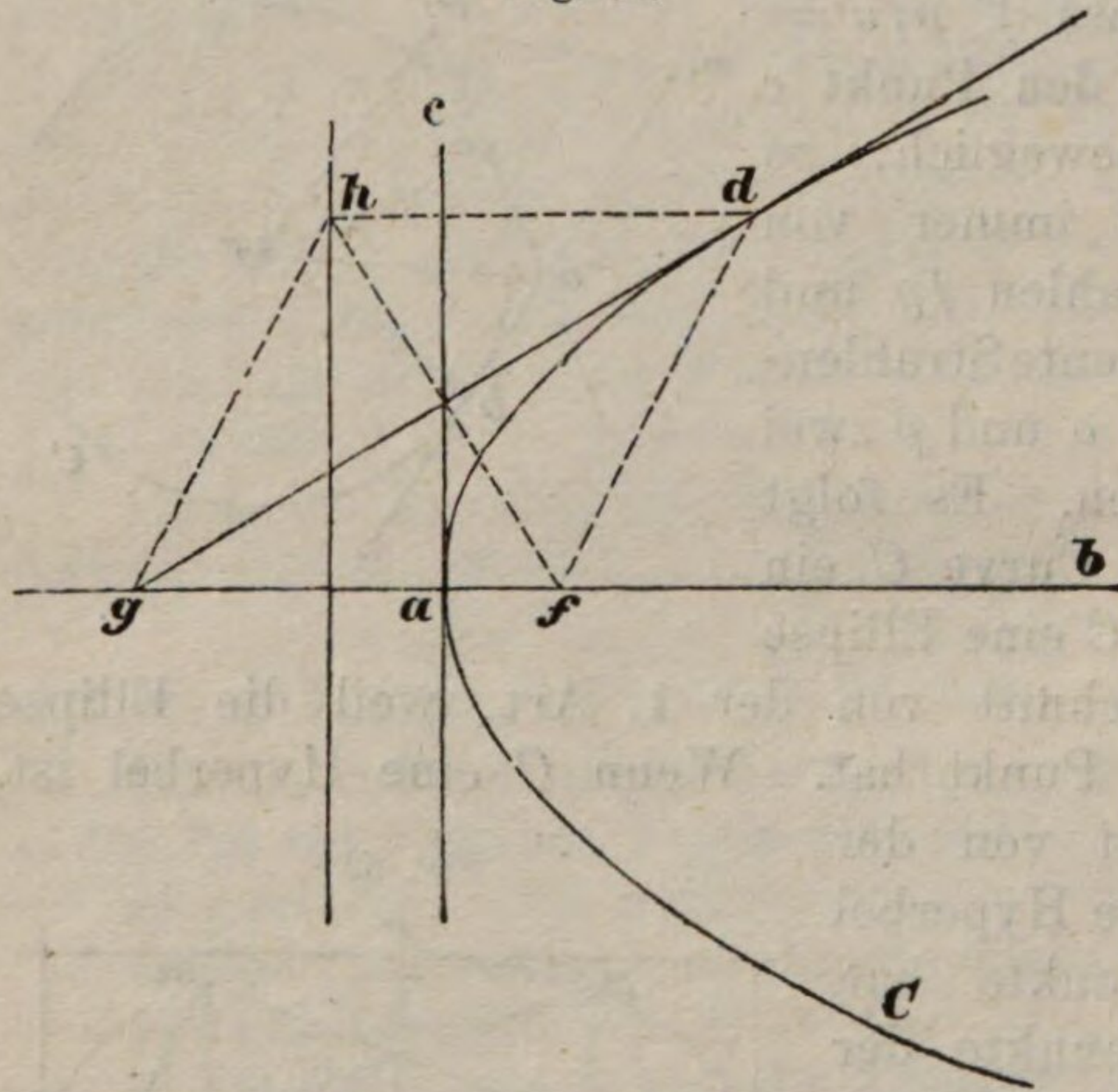
Fig. 63.



§ 1 b eine Ellipse construiren, deren Axen ab und cd sind und diese Ellipse stellt nach a) ebenfalls einen Kegelschnitt dar. Die beiden Kegelschnitte fallen aber zusammen, weil sie ausser den Punkten a, b, c, d noch die Tangenten dieser Punkte gemeinsam haben (§ 53 α).

2) mc und md (Fig. 63) seien die Asymptoten eines Kegelschnitts C der zweiten Art (§ 61 b). ab sei diejenige Axe dieses Kegelschnitts, welche denselben in zwei Punkten (a und b) trifft (§ 66 und Auflösung von § 41 γ). Man kann nun nach § 7 c eine Hyperbel construiren, welche die Punkte a und b zu Scheitelpunkten und die Geraden

Fig. 64.



mc und md zu Asymptoten hat. Diese Hyperbel ist aber nach a) ebenfalls ein Kegelschnitt. Die beiden Kegelschnitte fallen zusammen, weil sie die Punkte a und b , die unendlich fernen Punkte der Asymptoten und die Tangenten in diesen 4 Punkten gemeinsam haben (§ 53 α).

3) ab (Fig. 64) sei die Axe eines Kegelschnitts der 3. Art und a der Scheitelpunkt desselben. d sei ein weiterer

Punkt der Curve und dg seine Tangente. Man kann eine Parabel construiren (§ 9 g), welche ab zur Axe, a zum Scheitelpunkt hat und in dem Punkte d von der Geraden gd berührt wird. Diese Parabel ist aber nach a) ebenfalls ein Kegelschnitt. Beide Kegelschnitte haben den Punkt a , den Punkt d , den Gegenpunkt von d in Bezug auf die Axe ab (§ 66 e) und die Tangenten dieser drei Punkte gemein und fallen deshalb nach § 53 zusammen.

Uebungen.

§ 69.

1) Jeder Kegelschnitt der 1. und 2. Art besitzt zwei Brennpunkte, jeder Kegelschnitt der 3. Art einen solchen (§ 68α, § 1a, § 4a, § 8a).

2) Je zwei conjugirte Strahlen eines Brennpunktes stehen senkrecht auf einander (§ 10, 23).

3) Bei jedem Kegelschnitt wird die Polare eines Brennpunktes die diesem Brennpunkte zugehörige Leitlinie oder Directrix genannt. Man soll nun zeigen, dass diejenige Linie, welche schon in § 8 Leitlinie der Parabel genannt ist, wirklich die Polare des Brennpunktes sei (§ 67, Aufgaben 1 und 38α).

4) Der Tangentenabschnitt, welcher von dem Berührungspunkt bis zur Leitlinie reicht, wird aus dem zugehörigen Brennpunkte unter rechtem Winkel gesehen.

5) Die beiden Tangentenabschnitte, welche von dem Berührungspunkte einer Tangente bis zu den Leitlinien reichen, sind die Hypotenusen zweier rechtwinkliger ähnlicher Dreiecke, deren Spitzen in den beiden Brennpunkten liegen (§ 68 und § 3c, § 6c, § 9c).

6) Die Entfernungen der Curvenpunkte von einer Leitlinie und dem zugehörigen Brennpunkte bilden ein constantes Verhältniss.

Andeutung. m sei der Curvenpunkt, o und o' die Schnittpunkte der in m gezogenen Tangente mit den beiden Leitlinien und f, f' die Brennpunkte. Man hat nach 5) $fm:mf' = om:mo'$. Zieht man aber durch m eine Parallele zur Axe, welche die Leitlinien in p und p' trifft, so hat man $om:mo' = pm:mp'$ und daher $fm:mf' = pm:mp'$. Hieraus folgt $fm + mf':fm = pp':pm$ oder $fm:pm = 2a:pp'$. Den Werth pp' findet man, wenn man das Quadrat von a durch die Excentricität theilt. Man beweist dies, indem man für m einen Scheitelpunkt der Curve wählt und fm , sowie pm durch die grosse Axe, die Excentricität und pp' darstellt.

7) Inwiefern kann man von 2 Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt gemeinsam haben, sagen, dass sie zwei imaginäre Tangenten gemein hätten (§ 57b und Anmerkung zu § 36)?

8) Inwiefern kann man von 2 confocalen Kegelschnitten sagen, dass sie zwei Paare imaginärer Tangenten gemein hätten?

9) Es sei Aufgabe gestellt: Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt und

α) 3 Tangenten

β) 2 Tangenten und der Berührungspunkt der einen
gegeben sind. Wie kann man diese Aufgaben auf § 60, Aufgabe 23, α und β zurückführen?

10) Es seien die Aufgaben gegeben: Einen Kegelschnitt zu construiren, wenn ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie und

α) ein Curvenpunkt,

β) eine Tangente

gegeben sind. Wie kann man diese Aufgaben auf § 60, 16δ und ε zurückführen, unter der Voraussetzung, dass die dort erwähnte Gerade pq die Curve nicht schneide (§ 60, 20)?

Müller, Hubert,

Leitfaden der ebenen Geometrie, mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule bearbeitet von Hubert Müller In zwei Theilen

Bd.: 2

Leipzig 1875

Math.p. 364 f-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11305363-6